COMPENDIO MATEMÁTICO.


R. P. D. THOMAS VINCENTIUS TOSCA CONG. ORAT. VAL. PRESB.
TOSCAE est facies, animum qui cernere
Emanuel Monfort scul. Val.

COMPENDIO MATEMÁTICO,

EN QUE SE CONTIENEN TODAS LAS MATERIAS MAS PRINCIPALES DE LAS CIENCIAS, QUE TRATAN DE LA CANTIDAD.

QUE COMPUSO

EL D.R TOMAS VICENTE TOSCA,

PRESBITERO DE LA CONGREGACION DEL ORATORIO DE S. FELIPE NERI DE VALENCIA.

TOMO I.

Que comprehende { GEOMETRIA ELEMENTAR.
ARITMETICA INFERIOR.
GEOMETRIA PRACTICA.

EN VALENCIA

EN LA OFICINA DE LOS HERMANOS DE ORGA

MDCCLXXXXIV.

CON LAS LICENCIAS NECESARIAS.

Se hallará este con el de Arquitectura y Reloxes en la Librería de Pedro Juan Mallen y Compañía, junto á San Martin.

INDICE
DE LOS TRATADOS, LIBROS Y CAPITULOS QUE EN ESTE TOMO PRIMERO SE CONTIENEN.

TRATADO I.

DE LA GEOMETRÍA ELEMENTAR, QUE comprehende los seis primeros libros de Euclídes juntamente con el undécimo y duodécimo.

TRA-

INDICE.

TRATADO II.

CA-

TRATADO III.

INTRODUCCION BREVE
Á LAS DISCIPLINAS MATEMÁTICAS.

Es natural en los hombres el deseo y apetito del saber, dixo Aristóteles en el *lib.* 1 *cap.* 1 de la *Metafísica*; y entre todas las demas ciencias naturales, la que mas le satisface es la Matemática, pues las excede sin comparacion en la limpieza de sus verdades, en la energía de sus pruebas, en la claridad de sus demonstraciones y continuado hilo de sus conseqüencias. Con esto se mereció el nombre de *Matemática*, que, segun su derivacion del Griego, es lo mismo que doctrina y disciplina, haciéndose propio este noble título, que todas podian pretender por comun; porque carece de las dudas y opiniones tan freqüentes y comunes en las demas ciencias. No llegan á la excelsa region de la Matemática aquellas nieblas, que suelen obscurecer el resplandor de otras Facultades; ántes bien descienden de su levantada esfera tales luces, que descubren las sendas á las otras artes naturales para hallar la verdad deseada con acierto.

Con ella se descubren los mas retirados secretos de la naturaleza. Ella es la que averigua las fuerzas del ímpetu, las condiciones del movimiento, las causas, efectos y diferencias de los sones, la naturaleza admirable de la luz, las leyes de su propagacion: levanta con hermosura los edificios, hace casi inexpugnables las Ciudades, ordena con admiracion los exércitos; y entre las confusas é inconstantes olas del mar abre caminos y sendas á los que navegan. Se remonta últimamente la Matemática hasta el Cielo, para averiguar la grandeza de los Astros, y el concento y harmonía de sus movimientos; y con varias invenciones de Telescopios, ha hecho corriente el comercio de la tierra con el Cielo, tan deseado por los siglos antiguos. No será pues malógrado el tiempo que se consumiere en su estudio, ni será en vano el sudor que se empleare en tierra tan fértil, que le retorna en tan multiplicados frutos.

§. I.

OBJETO, NATURALEZA Y DIVISION de la Matemática.

EL objeto de la Matemática es la Quantidad, no tomada en quanto dice impenetrabilidad de un cuerpo con otro, que es propia consideracion del Físico; sí solamente en quanto es extension ó número: y generalmente es objeto de la Matemática aquello por lo qual una cosa se dice mayor, menor ó igual á otra; y la razon es, porque todo su empleo consiste en averiguar y demonstrar las propiedades y atributos de dicha Quantidad. Con que Matemática no es otro, que *Ciencia que trata de la Quantidad en quanto mensurable ó numerable.*

Casi todos los Matemáticos antiguos, siguiendo á los Pitagóricos, dividiéron la Matemática en quatro principales partes: Aritmética, Geometría, Música y Astronomía. Pero procediendo con mejor órden, las divido en Matemáticas puras y no puras. Aquellas son las que de tal suerte tratan de la Quantidad, que no consideran en ella accidente alguno ni afeccion sensible: tales son la Geometría y Aritmética; porque aquella habla del Triángulo, sin atender á si es blanco ó negro, de madera ú de hierro, &c. y esta trata de sus números, sin meterse en averiguar, si lo que numera son hombres ó piedras, &c. Las Matemáticas no puras son las que consideran la Quantidad vestida y acompañada con algun accidente ó afeccion sensible; y porque las afecciones sensibles son propias de la Filosofía Natural ó Física, se llaman Físico-Matemáticas: tales son la Música, que trata de la Quantidad sonora: la Optica, de la Quantidad visible, &c. Estas se subdividen en otras muchas, que con brevedad quiero re-

referir aquí ántes de entrar en esta Obra, para que viendo el estudioso reducida á breve mapa la amena Provincia que ha de caminar, añada nuevos alientos á su empresa.

§. II.

DECLÁRANSE LAS PARTES EN QUE SE divide la Matemática.

LA primera de todas es la Geometría, que tratando de la extension, mide las líneas, ángulos, superficies y sólidos, averigua sus proporciones, y abre los cimientos sobre los quales se levanta el edificio de toda la Matemática. Síguese la Aritmética, que se emplea en los números, especula sus propiedades, y exercita con ellos indefectibles operaciones. Entra en tercer lugar la Algebra, que con sagacidad increible sigue por varias y ocultas sendas la verdad hasta encontrarla, disuelve las qüestiones mas difíciles, y allana los mas intrincados laberintos. Síguese la Trigonometría, cuyo afan es resolver triángulos: á ella se debe todo el acierto de la Astronomía. Aumenta la facilidad de sus operaciones la Logarítmica, que trata de la noble invencion de los Logaritmos, números artificiales, que no poco han enriquecido el orbe literario. Todas las referidas son Ciencias puramente Matemáticas.

En el órden de las Físico-Matemáticas tiene el primer lugar la Música, que trata de la quantidad sonora, averigua la razon de las consonancias y disonancias, expone el sistema músico en diferentes géneros, dispone los Organos, Fístulas, Clavicordios, &c. compone diversas melodías, ajustando en ellas lo acorde con lo discorde, para entretenimiento apacible del oido. Síguese la Mecánica, que con artificiosas máquinas aumenta sobre manera las fuerzas de qüalquier potencia: es increible lo que aprovecha para filosofar con acierto en las cosas de la naturaleza.

La Estática, aun con el peso de su objeto, levanta su vuelo hasta las regiones mas remotas de la Física, averigua las proporciones y causas de la gravedad de los cuerpos, exâmina sus momentos, escudriña la proporcion de los movimientos por qualquiera línea, su cremento y decremento: depende de esta Facultad toda la Balística y Arte Tormentaria, de suerte que sin ella no se puede determinar cosa con acierto. Sigue á la Estática la Hidrostática, que se entretiene deliciosa en las corrientes de las aguas, averigua sus movimientos, compone de ellas fuentes artificiales, determina el orígen y causa de las naturales, exâmina los pesos de los metales y demas cuerpos en lo líquido, y abre gran puerta al conocimiento de las cosas naturales.

La Arquitectura Civil levanta los edificios con firmeza, hermosa proporcion y simetría, segun los cinco órdenes vulgares. Llégase á esta el Arte que llaman *Montea*, que valiéndose de las reglas Geométricas, corta y ajusta las piedras, levantando con ellas diversos géneros de arcos y bóvedas en las fábricas. Síguese la Arquitectura Militar, que enseña á fortalecer las Plazas, con tal disposicion de muros, baluartes, fosos y otras defensas, que pocos pueden pelear y defenderse contra muchos. La Artillería ó Arte Tormentaria, trata de las máquinas de fuego, dispone y exâmina los cañones de Artillería, regúla el modo de arrojar las balas, y otras invenciones de fuego á lugar determinado por diferentes líneas.

La Optica considera la quantidad en quanto es visible, y así explaya su consideracion por los campos mas amenos de la naturaleza, empleándose en la especulacion del movimiento de la luz y rayos visuales, enseña la formacion y deformacion de las imágenes, en tan diversas proyecciones y reducciones, que de un solo punto se vé formado lo que con ordenado desórden está deformado en muchos. Nacen de ella la Perspectiva, Catóptrica y Dióptrica. Aquella con diferentes trayecciones, proyecciones y decusaciones de los rayos, finge léjos lo que está cerca, y abulta lo que no tiene cuerpo. La Dióptrica ó Arte Anaclástica trata de los rayos de la luz refractos, de sus ángulos, concursos y diversiones, se emplea en la fábrica de todo género de Telescopios y Microscopios, con los quales hace parecer cerca lo que está léjos, léjos lo que está

cer-

cerca, grande lo que es pequeño, y pequeño lo que es grande: con esto ha dado á estos siglos nuevas noticias de los Cielos, nuevo conocimiento del artificio y textura de las plantas, flores y animales, haciendo en gran parte patente á los ojos aquel artificio que tanto tiempo ocultaba la naturaleza. La Catóptrica ó Arte Anacámtica trata de los rayos reflexos; y atendiendo á sus leyes, fabrica gran variedad de espejos llanos, cóncavos, convexôs, que ya recogiendo, ya esparciendo los rayos, causan admirables efectos.

La Geografía considera el globo terrestre, y nos ofrece en los Mapas que fabrica una perfecta idea de su disposicion, presentando á nuestra vista en breve espacio sus dilatadas regiones y provincias. Mas alto se remonta la Astronomía, sube á las regiones celestes, averigua las distancias, grandezas y disposiciones de los Astros, y en un sistema nos hace patente la gran máquina de sus movimientos. A la Astronomía sigue la Gnomónica, que con la sombra de un estilo nos muestra los movimientos de los Cielos, y con la variedad de Reloxes que fabrica, determina en diferentes planos los pasos que da el Sol por la luminosa carrera de su Eclíptica. Y últimamente la Cronografía se emplea en la ordenacion de los tiempos, ajustando sus períodos á los movimientos del Cielo. Estas son las materias mas principales de la Matemática.

§. III.

ORÍGEN, PROGRESO Y UTILIDAD de las Matemáticas.

NO hay duda, que con las demas ciencias infundió Dios á nuestro primer Padre Adan la noticia de las Matemáticas, la qual se fué continuando por sus descendientes hasta Abraham, que la comunicó á los Caldeos y á los Egipcios, y de estos pasó sin duda á los Griegos; porque Táles Milesio el año 584 ántes del Nacimiento de nuestro Salvador, pasó de Grecia á Egipto para aprender

la

la Geometría, y comunicarla despues á los suyos. A este siguiéron Varones insignes en la Matemática, como Pitágoras Samio, Anaxágoras Clazomenio, Enópides Chio, Anaxîmandro Milesio, Hipócrates Chio, Demócrito, Teodöro y su discípulo Platon, Arquítas Tarentino, Teoteto Ateniense, Neóclides Eudoxô, Xenócrates, Aristóteles, Euclídes, Eratóstenes, Arquimédes, Gémino, Menelao, de cuyos escritos compuso Teodosio en tiempo de Pompeyo Magno los elementos esféricos: siguióse á estos Ptolomeo Alexandrino, Proclo, Teon, Campano, Juan de Regio-Monte, y otros muchos hasta este nuestro siglo, en el qual se han adelantado en gran manera las Matemáticas por muchos é insignes Autores, especialmente de la esclarecida Religion de la Compañía de Jesus, que fuera largo el referirles; véase el Catálogo, que de todos pone el Padre Claudio Millet al principio de su curso Matemático. Han sido siempre estimadas y tenidas en mucho estas ciencias, no solo de los Filósofos antiguos, como hemos visto; sí tambien de Príncipes y Reyes que empleáron muchas tareas en su estudio, como fuéron Atlante Rey de Mauritania, Agátocles Rey de los Sículos, Ptolomeo Rey de Egipto, Don Alfonso el Sabio Rey de Castilla y Leon, Júlio César, Adriano y Antonino Emperadores, y otros muchos. Fuéron tambien estimadas de muchos Santos Padres de la Iglesia que se empleáron en ellas, especialmente se nos ofrece San Basilio, á quien alaba su discípulo San Gregorio Nazianceno, por haberse adelantado mucho en la Astronomía, Geometría, Aritmética y otras Matemáticas; á quien se añaden San Agustin y el Venerable Beda, como se vé en lo que de estas materias dexáron escrito.

Y no es mucho apreciasen tanto su estudio, pues ademas de su nobleza, son de imponderable provecho. Ellas, decia Platon, avivan el ingenio, sutilizan el discurso, y le hacen apto para aprender mejor las demas ciencias: por esta causa excluía de su Academia los que ignoraban la Geometría. Sin las Matemáticas no se puede dar paso en la Filosofía Natural con acierto; porque sin la Estática ¿cómo se han de explicar los movimientos de los cuerpos gra-

graves, su aceleracion y proporciones? ¿cómo la restitucion de los compresos y tensos, en que está sin duda la mayor parte de los efectos de la naturaleza? Sin la Optica, Dióptrica y Catóptrica, ¿qué se discurrirá en materia de los colores y de la luz, sino tinieblas? ¿Qué concepto se podrá hacer de la formacion del Iris, Coronas y otros meteoros? Quánto aprovechen tambien para la Teología, lo declara muy bien San Agustin *en el lib.* 2 *de Doctr. Christiana, cap.* 16, 19 *y* 37; y San Gerónimo *tom.* 1 *epist.* 1. Y especialmente son necesarias para la perfecta inteligencia de la Sagrada Escritura, la Geometría, Aritmética y Geografía, por haber casi innumerables textos que requieren estas noticias para su inteligencia.

§. IV.

MÉTODO CON QUE SE DEBEN ENSEÑAR y aprender las Matemáticas.

El método general para enseñar y tratar qualquiera ciencia, ha de observar entre otras estas dos leyes. La primera, que todas sus materias vayan con tal órden y conseqüencia, que parezca nacen las unas de las otras; y aquellas se traten primero, que han de servir de luz para las demas. La segunda es, que se procure en quanto fuere posible, mezclar con lo áspero lo deleytable, para que cogiendo el entendimiento temprana la cosecha de sus trabajos, prosiga con mayor denuedo sus tareas. Entrambas leyes he procurado observar en esta Obra, introduciendo en ella al Lector por la Geometría elementar y Aritmética, á la Geometría práctica, en quien perciba el fruto de lo que trabajó en las primeras. Síguense á estas la Aritmética Superior y Algebra, é inmediatamente la Música, cuyos Teoremas no son ménos apacibles al discurso, que deliciosas sus consonancias al oido.

Explico despues con brevedad las Secciones cónicas de Apolonio, por servir de mucha luz á los tratados siguientes, como son la Maquinaria ó Mecánica, la Estática, Hidrostática é Hidráulica, á que sigue el tratado de Rios y Fuentes y demas movimientos de las aguas. Entro despues en la Arquitectura Civil y Militar, y Arte Tormentaria ó Artillería. De aquí paso á la Optica, Perspectiva, Catóptrica y Dióptrica. Explico despues la Trigonometría y Logarítmica, que si bien habian de seguir á la Geometría y Aritmética, pero por ser mas para los tratados siguientes, que para los referidos, les he dado este lugar inmediato al de la Esfera celeste y terrestre. A estos siguen la Gnomónica y Náutica. Entro despues en el espacioso campo de la Astronomía, y pasando á la Cronografía, cerraré este Compendio Matemático con una breve explicacion de la Astrología; y aunque su poca certeza le desmerece el lugar entre las Matemáticas, no será de pequeña conseqüencia manifestar los flacos fundamentos en que estriba. Siguiendo el referido órden el estudioso, saldrá felizmente con su empresa; pero perderá el tiempo y el trabajo, el que sin haber entendido los primeros tratados, quisiere aplicar su estudio á los siguientes. Esto no obstante, habiéndose hecho capaz de la Geometría y Aritmética, podrá emplear su trabajo en qualquiera de los otros, ménos en la Astronomía, que requiere estar versado en la resolucion de los triángulos que la Trigonometría enseña.

§. V.

EXPLICACION DE ALGUNOS TÉRMINOS que son freqüentes en la Matemática.

SUelen los Autores, tanto antiguos, como modernos, usar de los términos siguientes en sus tratados Matemáticos: Definiciones, Axîomas, Postulados, Proposiciones, Teoremas, Problemas y Lemas, los quales será bien queden explicados al principio de esta Obra.

Definiciones, son las explicaciones de los nombres y términos; y así decimos, que por este nombre *triángulo*, no entendemos otra cosa mas que una figura que consta de tres ángulos. Estas explicaciones de los términos es menester estén al principio de qualquier tratado; porque gran

par-

parte de las qüestiones, y tambien de los Paralogismos que se cometen, nace de la ambigüedad y diferentes inteligencias de los nombres.

Postulados, son unos principios tan claros y evidentes, que no necesitan de prueba ni demonstracion; y por ser freqüentes en el decurso de la ciencia, piden concederse al principio, para que despues no haya tropiezo en las demonstraciones, como *de qualquier punto á otro punto se puede tirar línea recta.*

Axîomas ó nociones comunes, son los principios generales comunes á todas las ciencias, tan evidentes y claros, que por sí mismos, con sola la declaracion de los términos, son manifiestos, como es: *El todo es mayor que su parte*; porque conocido qué cosa sea todo y parte, es evidente la dicha verdad.

Proposicion, es nombre general, y significa aquí qualquiera conclusion de la ciencia que proponemos para probarla por sus principios. De las proposiciones, unas son *Teoremas*, y otras *Problemas.*

Teorema, es una proposicion especulativa, que dice alguna propiedad ó pasion del sugeto, como es: *Los tres ángulos de qualquier triángulo juntos, son iguales á dos rectos.*

Problema, es una proposicion práctica, que propone el modo de hacer alguna cosa, como la que enseña dividir una línea en dos partes iguales.

Suele tambien muchas veces hallarse una proposicion que llaman *Lema.* Esta es la que únicamente se pone y se asume para demonstrar la proposicion ó proposiciones siguientes, de tal suerte, que si no es para este fin, no se haria mencion de ella.

Ademas de las sobredichas se hallarán las siguientes en este tratado.

Corolario ó Consectario, es una proposicion, que por legítima conseqüencia se infiere de lo ya demonstrado.

Escolio, es una anotacion que se añade algunas veces al fin de alguna proposicion, para mayor explicacion suya, ó para mayor extension de lo que en ella se enseña.

§.

§. VI.

EXPLICACION DE LAS CITAS mas freqüentes.

TOda esta Obra va dividida en tratados, cada tratado en libros, y cada libro en proposiciones. Y aunque en algunos tratados, para mayor claridad y distincion de las materias, divido los libros en capítulos; pero estos jamas interrumpen el hilo de las proposiciones, que va continuado desde el principio al fin de cada libro, para mayor brevedad de las citas: estas se expresarán ordinariamente en la forma siguiente.

Un número solo denota la proposicion de aquel mismo libro; como (4) significa *proposicion* 4 de aquel libro. Quando hay una *l* entre dos números, el primero denota la proposicion, y el segundo el libro: como (5 *l.* 1) denota *la prop.* 5 *del lib.* 1, y no añadiéndose otra cosa, se significa ser de aquel mismo tratado. Esta otra (*c.* 2, 1 *l.* 3) quiere decir *corolario* 2 *de la proposicion* 1 *del libro* 3. Y así de las demas.

TRA-

TRÁTADO I.

DE LA

GEOMETRÍA ELEMENTAR,

QUE COMPREHENDE

LOS SEIS PRIMEROS LIBROS DE EUCLIDES, JUNTAMENTE CON EL UNDÉCIMO Y DUODECIMO.

PROEMIALES.

DIspuso la sabiduría infinita de Dios esta gran fábrica del Mundo en medida, número y peso, díxo Salomon *Sap.* 11, 21, manifestando, que todo su admirable artificio está ajustado á los preceptos de la Geometría, Aritmética y Estática: de que se colige ser necesaria la noticia de estas ciencias para llegar al conocimiento perfecto de la Naturaleza. Tiene entre ellas el primer lugar la Geometría, por ser la que con sus líneas y ángulos forma la planta para levantar el Palacio de la Sabiduría, asegurando juntamente las bases de las siete colunas en que descansa su maravilloso edificio. Singularmente necesitan de ella las demas Matemáticas, de quien sacan firmeza para sus teoremas, luz pa-

para sus discursos, y claridad para sus demonstraciones.

Geometría, segun su etimología, es lo mismo que medida de la tierra; pero por comun sentir y uso, tanto de Griegos como de Latinos, se entiende por Geometría una de las principales partes de la Matemática, que tiene por objeto la quantidad continua, sin atender ni considerar en ella afeccion ó accidente alguno sensible; ó por mejor decir, mira como propio objeto todo lo mensurable, en quanto mensurable, como son líneas, superficies, sólidos, ángulos, &c. Con que la propia definicion de la Geometría es ser: *Ciencia que trata de lo mensurable en quanto mensurable*; esto es, en quanto se puede medir, dividir, aumentar, &c. sin atender á la materia ni á sus qualidades.

Es de dos maneras, *Práctica* y *Especulativa*. Esta manifiesta meramente la verdad de las proposiciones, demonstrando las propiedades y atributos de las cosas mensurables; y sus proposiciones se llaman *Teoremas*: aquella da reglas con que dirige las operaciones para que salgan con acierto, y sus proposiciones se llaman *Problemas*.

El orígen de la Geometría es sin duda tan antiguo como el Mundo; pero singularmente floreció en los Chinos luego despues del Diluvio, como prueba el Obispo Caramuel *art.* 1 *del Prólogo*: debió singularmente estimacion á los Egipcios, y sus mayores creces á los Griegos, cuyos fragmentos recogió Euclídes, y compuso de ellos los Elementos de esta Facultad por los años 315, ó segun otros 313 ántes del Nacimiento de Christo.

Hay de estos Elementos muchos y muy doctos Comentarios, por lo que entiendo ceñirme á solas aquellas proposiciones que juzgaré mas necesarias, omitiendo las que lo fueren ménos; pero sin faltar á la claridad, que deseo sea tanta, que qualquiera con una mediana aplicacion pueda aprenderlas sin Maestro. El estilo ordinario será este: Cada proposicion tendrá tres partes; la primera, será la explicacion de la propuesta; la segunda, será en los Teoremas la preparacion; y en los Problemas la operacion; y la tercera, la demonstracion; y si fuere menester en los Problemas se añadirá despues de la operacion la preparacion para demonstrarla.

LI-

LIBRO I.

DEFINICIONES.

1 *PUnto es lo que no tiene parte alguna.*

Explicacion. El punto se supone y considera como indivisible, y por consiguiente sin partes algunas en que se pueda dividir. Y aunque los Filósofos duden de la exìstencia, y aun de la posibilidad de los indivisibles Físicos, que llaman *Zenónicos*; pero del punto matemático nadie puede dudar, por ser indivisible solo por suposicion y consideracion del entendimiento.

Tres son las especies de la quantidad continua: *Línea*, *Superficie*, y *Cuerpo* ó *Sólido*.

2 *Línea es una longitud sin anchura.* Esto es, en quien se considera una sola extension ó dimension, que se llama *Longitud*.

3 *Los extremos de la línea son puntos.*

Divídese la línea en *Recta* y *Curva*.

4 *Línea recta es aquella que está igualmente extendida entre sus extremos.* Esto es, que entre sus extremos no se puede señalar punto alguno mas alto ó mas baxo que dichos extremos, segun Euclídes. O es aquella, segun Platon, cuyos extremos cubren los medios: ó es la mas breve distancia entre dos puntos, segun Arquimédes. *Línea curva* es qualquiera otra.

5 *Superficie es una quantidad que tiene longitud y latitud sin profundidad.* Esto es, superficie es una quantidad en quien se consideran solas dos dimensiones, de las quales, la que se quiere suponer primera se llama *Longitud*, y la segunda *Latitud*.

6 *Los extremos de la superficie son líneas.*

La superficie se divide en *plana* y *curva*.

7 *Superficie plana, es aquella que está igualmente exten-*

tendida entre sus extremos. O á quien por todas partes se ajusta una línea recta. Superficie curva es qualquiera otra. Sólido ó cuerpo es una magnitud, que consta de las tres dimensiones, longitud, latitud y profundidad. Con que la línea es una sola dimension; la superficie dos; el cuerpo tres; y el punto ninguna.

8 *Angulo plano, es la inclinacion de dos líneas que concurren en un punto, sin estar en derechura la una con la otra.*

Explicacion. El ángulo plano se forma de dos líneas, que concurren en un punto, como ABC (*lám.* 1. *fig.* 1.) Y dichas líneas no han de estar en derechura la una con la otra; porque de esa suerte formarian las dos una línea, como CBD. Adviértese, que ser el ángulo mayor ó menor, no depende de ser mas ó ménos largas las líneas que le componen, sí de estar mas ó ménos abiertas: de suerte, que el ángulo ABC siempre seria el mismo, aunque las líneas BA, BC corriesen infinitamente. Qualquiera ángulo se suele nombrar con tres letras, y la que está en medio es siempre la que se halla en el concurso de las líneas, como en este exemplo la letra B.

El ángulo, por razon de las líneas que le forman, se divide en *rectilíneo*, *curvilíneo* y *mixtilíneo*.

9 *Angulo rectilíneo, es el formado de líneas rectas: curvilíneo de líneas curvas: y mixtilíneo de una recta y otra curva.*

Por razon de la inclinacion, ó abertura de las líneas, se divide en *recto*, *obtuso* y *agudo*.

10 *Angulo recto, es qualquiera de los que forman una línea con otra, quando de tal suerte concurre con ella, que á entrambas partes forma los ángulos iguales; y esta línea se llama perpendicular.*

11 *Angulo obtuso, es aquel que es mayor que recto.*

12 *Angulo agudo, el que es menor que recto.*

Explicacion. En la *fig.* 2. la línea GF de tal suerte cae sobre EH, que no se inclina á una ni á otra parte, con que forma los ángulos GFE, GFH iguales: y en este caso se dicen estos ángulos rectos; y la línea GF es perpendicular á la EH. Y porque el ángulo IFE es mayor que el recto GFE, se llama *obtuso*; y el ángulo IFH, por ser menor que el recto GFH, se dice *agudo*.

La

La medida del ángulo es el arco del círculo, que se imagina descrito del punto del concurso de las líneas como centro, y se comprehende entre las dos dichas líneas que forman el ángulo. Como si del punto F se describe qualquier círculo, el arco HI será medida del ángulo IFH. Para este y otros fines dividen los Matemáticos el círculo en 360 partes iguales, que llaman *grados*; y cada grado en 60 minutos primeros; y cada minuto en 60 segundos, y así infinitamente. Y estos grados son los que determinan la magnitud del ángulo, como si el arco IH es de 49 grados y 30 minutos, el ángulo IFH es de 49 grados y 30 minutos, y así de los demas.

Tambien como el círculo conste de 360 grados, el semicírculo, como EGH, contendrá 180: y la mitad del semicírculo, ó la quarta parte del círculo, como es GH, ó GE, será de 90 grados; de que se infiere, que el ángulo recto GFE consta de 90 grados, el ángulo obtuso IFE es de mas de 90 grados, y el agudo IFH tiene ménos de 90 grados.

13 *Término, es el extremo de una quantidad.*

14 *Figura, es una quantidad cerrada de uno ó muchos términos.* Advirtiendo, que ha de estar cerrada por todas partes; y así el ángulo, como ABC (*fig.* 1.) no es figura, por quedar abierto por A y C.

15 *Círculo, es una figura plana, terminada de una sola línea llamada Circunferencia, distante igualmente por todas partes de un punto que tiene en medio, del qual todas las líneas, que saliendo de él, se terminan en la circunferencia, son iguales.*

16 *Este punto de en medio se llama Centro.*

17 *Diámetro del círculo, es qualquiera línea recta, que pasando por el centro, se terminan sus extremos en la circunferencia, y divide el círculo en dos partes iguales.*

18 *Semicírculo, es una figura terminada por el diámetro y la mitad de la circunferencia.*

Explicacion. (*fig.*2.) El espacio ó quantidad cerrada dentro de la línea GEKH es círculo; y dicha línea que le cierra, se llama *circunferencia*, *periferia* y *perímetro*. El pun-

punto F es el centro, de quien salen las líneas FH, FI, &c. á la circunferencia, todas iguales. La recta EFH, que pasando por el centro F, se termina por entrambas partes en la circunferencia, se llama *diámetro*; y su mitad FH ó FE, y generalmente todas las que salen del centro y se terminan en la circunferencia, se llaman *semidiámetro* ó *radio*.

El diámetro EFH divide el círculo en dos partes iguales, como se vé claramente; porque de otra suerte los semidiámetros FG y FK, no serian iguales contra la naturaleza del círculo. Con qüe el espacio comprehendido de EH, y el arco EGH es semicírculo; y el espacio EGF quadrante ó quarta de círculo.

19 *Figura rectilínea, es aquella que está comprehendida de líneas rectas.*

20 *Triláteras ó triángulos, son las figuras que constan de tres lados.*

21 *Quadriláteras, las que constan de quatro lados.*

22 *Multiláteras ó polígonos, las que constan de mas de quatro lados.*

El triángulo se divide en tres especies por razon de sus lados, y en otras tres por razon de sus ángulos.

Por razon de sus lados se divide en Equilátero, Isósceles y Escaleno.

23 *Triángulo Equilátero, es el que tiene los tres lados iguales, como A.* (*fig.* 3.)

24 *Isósceles, es el que tiene solamente dos lados iguales, como C.*

25 *Escaleno, es el que tiene sus tres lados desiguales, como B.*

Por razon de los ángulos se divide el Triángulo en Rectángulo, Acutángulo y Obtusángulo.

26 *Triángulo Rectángulo, es el que tiene un ángulo recto, como B.*

27 *Obtusángulo ó Ambligonio, el que tiene un ángulo obtuso, como C.*

28 *Acutángulo ú Oxigonio, el que tiene sus tres ángulos agudos, como A.*

29 *Líneas paralelas son las que por todas partes distan igualmente entre sí, como MN, Op.* (*fig.* 4.) De que si-

se sigue; que aunque se alarguen infinitamente, jamas podrán concurrir ni por un cabo ni por el otro. La generacion de las paralelas depende, de que la recta LQ perpendicular á OP, se mueva sobre OP, conservándose siempre perpendicular; porque con esto el punto L describirá la paralela MN.

Las figuras Quadriláteras se dividen en *Paralelógramo* y *Trapezio*.

30 *Paralelógramo, es una figura quadrilátera, que tiene todos sus lados opuestos paralelos, como son las A, C, D, E. (fig. 5.)*

31 *Trapezio, es qualquiera Quadrilátero, que no es paralelógramo, como B.*

El Paralelógramo se divide en rectángulo, y no rectángulo ú obliqüángulo.

32 *Paralelógramo rectángulo, es el que tiene sus quatro ángulos rectos, como A, C.*

33 *Paralelógramo obliqüángulo, es el que no tiene ángulos rectos, como D, E.*

El Paralelógramo rectángulo se divide en Quadrado y Oblongo.

34 *Quadrado, es el rectángulo, que consta de lados iguales, como A.*

35 *Oblongo, es el rectángulo, que no tiene todos los lados iguales, sí solo los opuestos, como C.*

El Paralelógramo obliqüángulo se divide en Rombo y Romboyde.

36 *Rombo, es un obliqüángulo, que tiene sus quatro lados iguales, como D.*

37 *Romboyde, es un obliqüángulo, cuyos lados no son todos iguales, sí tan solamente los opuestos, como E.*

38 Si en un paralelógramo se tira de un ángulo á su opuesto una línea PQ, (*fig.* 6.) esta línea se llama diámetro: y suponiendo la XZ paralela á VQ, y por el punto S, en que corta á la diagonal, suponiendo otra paralela RY, quedará el paralelógramo dividido en quatro paralelógramos, de los quales los dos por quienes no pasa el diámetro, que son SRTZ, XVYS, se llaman *complemento*; y los otros dos por quienes pasa, se dicen *estar al rededor del diámetro.*

PETICIONES.

1 *Que se pueda tirar una línea recta de un punto á otro.*

2 *Que se pueda prolongar una línea recta á discrecion.*

3 *Que de un centro se pueda con qualquier intervalo describir un círculo.*

AXIOMAS.

1 *Todas las cosas que son iguales á una misma, son iguales entre sí.*

2 *Si á cosas iguales se añaden cosas iguales, los todos serán iguales.*

3 *Si de cosas iguales se quitan cosas iguales, las restas quedarán iguales.*

4 *Si á cosas desiguales se añaden cosas iguales, las compuestas quedarán desiguales.*

5 *Si de cosas desiguales se quitan cosas iguales, las restas serán desiguales.*

6 *Las cosas que son duplas, triplas, &c. de una misma cosa, son iguales entre sí; y lo mismo si son mitades, tercios, &c. de una misma cosa.*

7 *Las cosas que puestas unas sobre otras se ajustan, son iguales; pero por ser iguales no se ajustan, sino quando son semejantes, como un círculo igual á otro; un triángulo equilátero igual á otro, tambien equilátero, &c.*

8 *El todo es mayor que su parte.*

9 *Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.*

10 *Todas las líneas que se terminan en dos paralelas, siendo perpendiculares á ellas, serán iguales.*

11 *Dos líneas rectas no encierran espacio.*

12 *Dos líneas rectas no tienen segmento comun, sí que se cortan solamente en un punto.*

PROP. I. Problema.

Sobre una recta dada y terminada, describir un triángulo equilátero.

Explicacion. Sea dada la recta AB terminada, esto es, de longitud determinada; y se pide se describa sobre ella un triángulo equilátero. (*fig.* 7.)

Operacion. Del punto B, con el intervalo BA, descrícríbase el círculo ACD; y con el mismo intervalo, haciendo centro en A, descríbase el círculo BCD, que cortará al primero en C. Tírense las rectas AC, BC; y el triángulo ABC será equilátero.

Demonstracion. Las rectas BC, BA son iguales, por ser radios de un mismo círculo ACD. (*def.* 15.) Asímismo AC, AB son iguales, por ser radios de un mismo círculo BCD: luego BC, AC son iguales con la misma AB, y por consiguiente entre sí: (*axío.* 1) luego el triángulo ABC consta de tres lados iguales: luego es equilátero.

PROP. II. Problema.

De un punto dado, tirar una recta igual á otra dada. (*fig.* 8.)

Explicacion. Sea dado el punto B, y la recta A: pídese, que del punto B se tire una recta igual á la recta A.

Operacion. Tómese con el compas la recta A, y haciendo centro en B, hágase con dicho intervalo un círculo; y tirando á qualquiera punto de su circunferencia una línea BD, esta será igual á la dada A. (*def.* 15.)

PROP. III. Problema.

Dadas dos rectas desiguales, cortar de la mayor una parte igual á la menor. (*fig.* 8.)

Operacion. De un extremo B de la mayor, con el intervalo de la menor A, se describirá el círculo DEF, que cortará la BC en E; y la BE será igual á la línea A. (*def.* 15.)

PROP. IV. Teorema.

Si dos triángulos tienen los dos lados del uno iguales á los dos del otro, cada uno al suyo; y los ángulos comprehendidos entre estos lados fueren iguales, los triángulos serán totalmente iguales. (*fig.* 9.)

Explicacion. Ser una figura absolutamente igual á otra, consiste en que el espacio que encierra la una, sea igual al espacio que encierra la otra; pero ser una figura totalmente igual á otra, consiste no solo en que los espacios que entrambas encierran sean iguales, sí tambien en que los

los lados y ángulos de la una sean iguales á los de la otra, cada uno á su correspondiente.

Dice pues Euclídes en esta proposicion, que si los triángulos FEH, KIL tienen los lados KL, FH iguales, como tambien KI, FE, y los ángulos K y F comprehendidos de dichos lados fueren tambien iguales, que los triángulos serán totalmente iguales; esto es, que la basa IL será igual con EH, y el ángulo L al ángulo H, y el ángulo I al ángulo E.

Demonstracion. Supóngase que el triángulo KIL se pone sobre el triángulo FEH, y porque el lado KL se supone igual al lado FH, puesto el punto K sobre F, el punto L vendrá sobre H, y todo el lado KL se ajustará al lado FH: y porque el ángulo K se supone igual al ángulo F, el lado KI caerá sobre FE, y no mas afuera ni mas adentro, porque ya dichos ángulos no serian iguales: luego el lado KI cae sobre FE, y por suponerse entrambos iguales, el punto I caerá sobre E; y cayendo tambien L sobre H, como hemos probado, se sigue, que la basa IL se ajusta sobre EH, y por consiguiente el ángulo L sobre el ángulo H, y el ángulo I sobre E: luego la basa IL es igual á EH, y el ángulo L á H, como tambien I á E; y todo el triángulo al otro, que es lo que se debia demonstrar.

PROP. V. Teorema.

En el triángulo Isósceles, los ángulos sobre la basa son iguales, como tambien los que se forman debaxo la basa, alargados los lados. (fig. 10.)

Explicacion. Sea el triángulo Isósceles MNO, cuyos lados iguales NM, NO se alargan hasta P y Q. Digo que los ángulos NOM, NMO son iguales; como tambien los ángulos MOQ, OMP.

Preparacion. Considérese la recta NR que parta igualmente el ángulo N.

Demonstracion. Los triángulos RNO, RNM tienen los lados NO, NM iguales por suposicion, y el lado NR comun, y los ángulos RNO, RNM iguales por suposicion: luego dichos triángulos (por la 4) son totalmente iguales: luego el ángulo O es igual al ángulo M.

Tam-

Tambien por ser dichos triángulos totalmente iguales, si el lado NO se pone sobre NM, tambien RO vendrá justamente sobre RM, y OQ sobre MP: luego todo el ángulo ROQ se ajustará sobre RMP: luego son iguales. Esta proposicion halló Táles Milesio.

COROLARIOS.

1 *De lo dicho se sigue, que el triángulo equilátero es equiángulo.*

2 *En el triángulo Isóceles, la recta que parte igualmente el ángulo del vértice, parte tambien igualmente la basa, y es perpendicular á la basa; y al contrario, si parte igualmente la basa, es perpendicular á ella; porque siendo los triángulos NRO, NRM totalmente iguales, son RO, RM iguales; y los ángulos que forma NR con la MO son rectos: luego (def. 10.) NR es perpendicular.*

3 *Si la perpendicular parte igualmente la basa de un triángulo, tambien el ángulo; si el ángulo, tambien la basa: y la recta que parte igualmente basa y ángulo, es perpendicular, y siempre el triángulo será Isóceles.*

PROP. VI. Teorema.

Si un triángulo tiene dos ángulos iguales, los lados opuestos á dichos ángulos tambien serán iguales. (fig. 11.)

Explicacion. Sea el triángulo TSV, cuyos ángulos S y V sean iguales: digo que los lados TS, TV opuestos á dichos ángulos serán iguales.

Preparacion. Si no son iguales, luego uno de ellos, como por exemplo TS, será mayor que el otro TV: luego se podrá cortar de él una parte igual á TV: supóngase pues ser SX, y tírese la recta XV.

Demonstracion. Los triángulos XSV, TVS tienen el lado XS igual á TV, y el lado SV comun á entrambos, y los ángulos S y TVS comprehendidos de dichos lados, son iguales: luego (4) los triángulos XSV, TSV son iguales; lo que es absurdo, por ser el uno parte del otro: (ax. 8.) luego no puede un lado ser mayor que otro, y por consiguiente son iguales. Que es lo que, &c.

CO-

COROLARIO.

Síguese, que el triángulo equiángulo es equilátero.

PROP. VII. Se omite por no ser menester.

PROP. VIII. Teorema.

Si dos triángulos tuvieren los tres lados del uno iguales á los tres del otro, serán totalmente iguales. (*fig.* 12.)

Explicacion. Los triángulos DEF, ABC tienen el lado ED igual al lado BA, el lado EF al lado BC, y el lado DF al lado AC. Digo que los triángulos son totalmente iguales.

Preparacion. Del punto D como centro, con la distancia DE, hágase el círculo EGH; y del punto F, con la distancia FE, hágase el círculo EIH.

Demonstracion. Supóngase que AC se pone sobre DF, y por ser iguales se ajustarán; esto es, A caerá sobre D, y C sobre F; con esto el punto B caerá sobre E necesariamente; porque ha de caer en algun punto de la circunferencia EGH, por suponerse AB igual con el semidiámetro DE; y tambien ha de caer en algun punto de la circunferencia EIH, por suponerse CB igual al semidiámetro FE: luego cae en la interseccion E, punto comun á entrambas circunferencias; luego todo el triángulo ABC se ajusta con DEF, y son totalmente iguales. Que es, &c.

PROP. IX. Problema.

Dividir un ángulo rectilíneo dado en dos partes iguales: (*fig.* 13.)

Operacion. En el ángulo dado OLP córtense de LO, LP las partes iguales LK, LM, y sobre la KM descríbase el triángulo equilátero KNM; y tirada la LN, quedará dividido el ángulo dado en dos ángulos iguales.

Demonstracion. Los triángulos LKN, LMN tienen los lados del uno iguales á los del otro, KL á LM, KN á MN, y el lado LN comun á entrambos: luego (8) son totalmente iguales: luego los ángulos KLN, MLN son iguales. Las líneas KM, MN, KN solo sirven para la demonstracion; porque para dividir el ángulo basta tener el punto N.

PROP.

PROP. X. Problema.

Dividir una recta dada y terminada en dos partes iguales. (*fig.* 14.)

Operacion. Sea la línea MN la que se ha de dividir: descríbase á estrambas partes (1) un triángulo equilátero; y tirando la línea PQ de la una cúspide á la otra, quedará dicha línea dividida en O en dos partes iguales. Demuéstrase como la antecedente.

PROP. XI. Problema.

De un punto dado en una línea, levantar sobre ella una perpendicular. (*fig.* 14.)

Explicacion. En la línea MN se da el punto O, y se pide que se levante una perpendicular desde el punto O.

Operacion. Córtense las OM, ON iguales, y sobre MN descríbase el triángulo equilátero MPN, y la línea PO será perpendicular.

Demonstracion. Como consta de lo demonstrado en la *prop.* 9, los triángulos MOP, NOP son totalmente iguales: luego los ángulos en O son iguales, y por consiguiente rectos, y la PO perpendicular. (*def.* 10.)

PROP. XII. Problema.

De un punto dado fuera de una línea, baxar á ella una perpendicular. (*fig.* 15.)

Explicacion. Sea dada la recta RS indeterminada; esto es, que se pueda alargar si fuere menester: y sea dado el punto V, de donde ha de baxar una perpendicular á la RS.

Operacion. Desde V descríbase un círculo que corte la RS en qualesquiera puntos X, Z. Divídase la XZ por medio en T, (10) y la línea VT será la perpendicular.

Preparacion. Tírense las líneas VX, VZ.

Demonstracion. En los triángulos VTX, VTZ, los lados VX, XT son iguales á los lados VZ, ZT, cada uno al suyo, y el lado VT es comun: luego (8) los triángulos son totalmente iguales; luego los ángulos en T son iguales, y por consiguiente rectos, y la VT perpendicular. (*def.* 10.) Este Problema halló Enópides Chîo.

PROP.

PROP. XIII. Teorema.

Quando una recta cae sobre otra, forma con ella ó dos ángulos rectos, ó que son tanto como dos rectos. (*fig.* 16.)

Explicacion. La recta AB cae sobre la recta CD: digo que los ángulos ABD, ABC, ó son dos rectos, ó que juntos son tanto como dos rectos.

Preparacion. Del punto B descríbase el semicírculo CAD.

Demonstracion. Si los ángulos ABD, ABC son iguales, son rectos. (*def.* 10) Y si son desiguales, tienen por medida á todo el semicírculo CAD: el semicírculo es medida de dos ángulos rectos; luego los ángulos ABD, ABC son tanto como dos rectos.

COROLARIO.

Todos los ángulos que se formaren de un punto sobre una línea, son tanto como dos rectos.

PROP. XIV. Teorema.

Si dos rectas se encuentran en un mismo punto de otra recta, formando con ella dos ángulos iguales á dos rectos, las dos harán una línea recta. (*fig.* 16.)

Explicacion. En el punto B de la recta AB concurren las rectas DB, CB, y se supone forman con AB los ángulos ABD, ABC, que juntos son tanto como dos rectos. Digo que DB, BC hacen una misma recta DC.

Demonstracion. Por ser los ángulos ABD, ABC tanto como dos rectos, el arco CAD que es su medida, es semicírculo: luego DBC es el diámetro, el qual es una línea recta.

PROP. XV. Teorema.

Si dos rectas se cortaren, los ángulos que forman verticalmente opuestos son, iguales. (*fig.* 17.)

Explicacion. Las rectas EF, GH se cortan en C. Digo que los ángulos ECH, GCF verticalmente opuestos, son iguales.

Demonstracion. La recta GC cae sobre EF: luego (13) los ángulos EGC, GCF son tanto como dos rectos: asimismo la recta EC cae sobre GH: luego los ángulos ECG, ECH son tanto como dos rectos: luego los dos ángulos

los ECG, GCF juntos, son iguales á los dos ECG, ECH: luego quitando el ángulo ECG comun, quedarán los ángulos ECH, GCF iguales. Este Teorema halló Táles Milesio.

PROP. XVI. y XVII.

Están incluidas en la proposicion 32, y ántes de ella no serán menester.

PROP. XVIII. Teorema.

En qualquiera triángulo, al mayor lado se le opone mayor ángulo. (*fig.* 18.)

Explicacion. Digo que en el triángulo AOB, el ángulo A, que se opone al lado mayor OB, es mayor que el ángulo B opuesto al lado menor OA.

Demonstracion. El ángulo A no es igual á B ni menor que B: luego es mayor. Lo primero no es igual; porque si lo fuera, los lados OA, OB serian iguales (6) contra lo supuesto. Lo segundo, no es menor que el ángulo B; porque si es menor, se podrá dentro del ángulo B tirar la recta FB, que forme el ángulo ABF igual al ángulo A. Siendo pues en esta suposicion dichos ángulos iguales, serán (6) FA, FB iguales; y añadiendo á entrambas la recta FO, será OFB igual á OFA; y siendo OFA menor que OB, será tambien OFB menor que OB: lo que es absurdo, por ser la recta OB la mas breve distancia: (*def.* 4.) luego el ángulo A ni es igual ni menor que B: luego mayor.

PROP. XIX. Teorema.

En todo triángulo, el mayor ángulo está opuesto al mayor lado.

Esta proposicion consta evidentemente de la pasada, de quien es conversa; porque habiéndose demonstrado, que el mayor lado está opuesto al mayor ángulo, síguese, que el mayor ángulo está opuesto al mayor lado; y así no es menester mas demonstracion.

PROP. XX. Teorema.

En todo triángulo, qualquiera dos lados juntos son mayores que el otro.

Supuesta la definicion de Arquimedes de la línea recta, es es como Axioma; porque (*fig.* 18.) la distancia OB es la mas breve: luego qualquiera otra OAB es mayor.

PROP. XXI. Teorema.

Si de los extremos de un lado de un triángulo se tiran dos rectas que se encuentren dentro de él, estas serán menores que las otras dos, mas formarán mayor ángulo. (*fig.* 19.)

Explicacion. De los extremos H, L se han tirado las rectas HI, LI, que se encuentran en I: digo que estas dos juntas son menores que las dos juntas HG, GL; pero que el ángulo HIL es mayor que el ángulo G.

Preparacion. Continúese HI hasta M.

Demonstracion. En el triángulo GHM los lados HG, GM juntos son mayores que HM, (20) y añadiendo á una y otra parte la LM, serán HG, GL mayores que HM, ML. Tambien en el triángulo IML los lados IM, ML juntos son mayores que IL; y añadiendo la comun HI, serán los lados HM, ML mayores que HI, IL. Y habiendo ya probado ser HG, GL mayores que los dos HM, ML, se sigue, que los lados HG, GL serán mucho mayores que HI, IL.

La segunda parte se demonstrará en el *corolario 2 de la 2 part. de la prop.* 32.

PROP. XXII. Problema.

Formar un triángulo de tres líneas dadas, con tal que qualquiera dos de ellas juntas sean mayores que la otra. (*fig.* 20.)

Explicacion: Sean las tres rectas dadas A, B, C: pídese se forme de ellas un triángulo.

Operacion. Tírese una recta á discrecion, y en ella se cortará NQ igual á A, OP igual á B, y PQ igual á C. Y desde O, con el intervalo ON, se describirá un semicírculo: y desde P, con el intervalo PQ, se describirá otro semicírculo, que cortará al primero en R: y tiradas las rectas OR, PR, quedará formado el triángulo que se pide. Este Problema halló Euforbo Frigio.

La demonstracion consta de la construccion misma.

PROP.

PROP. XXIII. Problema.

En un punto señalado en una recta hacer un ángulo igual á otro ángulo dado. (*fig.* 20.)

Explicacion. En la recta NP se ha señalado el punto P, y se pide, que se forme en él un ángulo igual al ángulo T.

Operacion. Tírese á discrecion la recta SR. Córtese la PO igual á TR, y PQ igual á ST, y ON igual á RS. Con el intervalo ON hágase un semicírculo, y otro con el intervalo PQ: y del punto R en que se cortan, se tirarán las rectas RO, RP; y el ángulo P será igual al ángulo T.

Demonstracion. Por la construccion los tres lados del triángulo ORP son iguales á los tres del triángulo RST: luego (8) el ángulo P es igual al ángulo T. Este Problema halló ó ilustró Enópides Chîo.

PROP. XXIV. Teorema.

Si dos triángulos tuvieren los dos lados del uno iguales á los dos del otro, cada uno á su correspondiente; el que tuviere mayor ángulo, comprehendido en los lados iguales, tendrá mayor basa. (*fig.* 21.)

Explicacion. Los triángulos BAC, BAD tienen el lado BA comun, y el lado AC igual con AD, pero el ángulo BAD es mayor que el ángulo BAC: digo que la basa BD es mayor que la BC.

Demonstracion. Las líneas AE, ED son mayores que AD, (20) AD es igual con AC: luego las AE, ED juntas son mayores que AC. Quítese de AED y de AEC el segmento comun AE, y quedará ED mayor que EC: añádase á entrambas el mismo segmento EB, y será BED mayor que BEC; y como BEC sea mayor que BC, la basa BD será mucho mayor que BC.

PROP. XXV. Teorema.

En el mismo caso, el triángulo que tuviere mayor basa, tendrá mayor angulo. (*fig.* 21.)

Explicacion. Digo que si la basa BD es mayor que BC, tambien el ángulo BAD será mayor que el BAC.

Demonstracion. Si no fuere así; el ángulo BAD será

ó

ó igual ó menor que BAC: si igual, tambien lo serán las basas BD, BC; (4) y si menor, la basa BD será menor que la BC, (24) y uno y otro es contra lo supuesto: luego el ángulo BAD es mayor que BAC.

PROP. XXVI. Teorema.

Si dos triángulos tuvieren los dos ángulos del uno iguales á los dos del otro; y un lado á un lado, cada cosa á su correspondiente, los triángulos serán totalmente iguales. (*fig.* 9.)

Explicacion. Los triángulos EFH, IKL tienen los ángulos E, H iguales á los ángulos I, L cada uno á su correspondiente, y un lado del uno igual al semejante lado del otro. Digo que los triángulos son totalmente iguales.

Demonstracion. Y lo primero sea el lado EH igual al lado IL, que son los que están entre los ángulos iguales. Por ser EH igual á IL, se ajustará sobre IL, y por ser el ángulo E igual á I, la EF caerá sobre IK, y por ser el ángulo H igual á L, la HF caerá sobre LK: luego el punto F caerá sobre K; porque de otra suerte los lados EF, HF no vendrian sobre IK, LK: luego todo el un triángulo se ajusta sobre el otro: luego son del todo iguales. Lo segundo, supongamos que los lados iguales sean FH, KL, que son los opuestos á los ángulos E, I iguales. Porque los ángulos E, H se suponen iguales á los ángulos I, L, tambien el ángulo F será igual al ángulo K (*corol.* 3, *prop.* 32, que por no tener dependencia de esta se puede suponer): luego por la razon dicha en la primera parte son los triángulos del todo iguales. Táles Milesio halló este Teorema.

PROP. XXVII. Teorema.

Si á las paralelas AB, CF las corta una recta GH, formará primero los ángulos alternos RLO, QOL iguales. (*fig.* 22.)

Preparacion. Del punto O tírese la OR perpendicular á AB, y del punto L la LQ perpendicular á CF.

Demonstracion. Consta de la generacion de las paralelas (*def.* 29.) que las dichas líneas OR, LQ son perpendiculares á entrambas paralelas; y son iguales entre sí, como mo tambien las RL, OQ; porque engendrándose las paralelas del movimiento de la perpendicular OR sobre OF, tanto corre el punto O, como el R: luego los triángulos RLO, QOL tienen los lados OQ, RL iguales, como tambien RO, LQ, y LO comun: luego (8) son totalmente iguales: luego los ángulos alternos RLO, LOQ son iguales. De aquí se colige, que los ángulos LOC, OLB alternos, son tambien iguales, por ser complementos de los iguales arriba dichos hasta dos rectos. (13)

Segundo. Digo que al entrar la línea GH en las paralelas, forma los ángulos GLB, LOF iguales.

Demonstracion. El ángulo GLB es igual á su vertical opuesto RLO; (15) este es igual al alterno LOF como queda probado: luego GLB es igual á LOF.

Tercero. Digo que los dos ángulos internos de una misma parte; esto es, los ángulos ALO, COL son tanto como dos rectos.

Demonstracion. ALO es igual á LOF, (*part.* 1.) LOF con LOC hace dos rectos: (13) luego ALO con LOC hace dos rectos.

PROP. XXVIII. Teorema.

Si una línea recta cayendo sobre otras dos rectas, hiciere los ángulos alternos iguales, estas dos serán paralelas. (*fig.* 23.)

Explicacion. La recta GH cae en las líneas AB, CF, y forma los ángulos alternos ALO, LOF iguales: digo que AB, CF son paralelas.

Demonstracion. Si no son paralelas, tírese por L otra línea XZ paralela á CF: luego (27) el ángulo XLO será igual con FOL; este se supone ser igual al ángulo ALO: luego el ángulo XLO es igual á ALO, el todo á su parte, que es imposible: luego la línea AB es paralela con CF.

PROP. XXIX. Teorema.

Si una línea recta cayendo sobre otras dos rectas, entrare en ellas con iguales ángulos, ó hiciere los dos interiores de un mismo lado iguales á dos rectos, estas dos líneas serán entre sí paralelas. (*fig.* 22.)

Explicacion. La recta GH corta las líneas AB, CF.

Di-

Digo lo primero, que si forma los ángulos GLB, LOF iguales, son dichas líneas paralelas.

Demonstracion. El ángulo GLB es igual á su vertical opuesto ALO, (15) el mismo GLB se supone igual á LOF: luego ALO es igual á LOF, que es su alterno: luego (28) las AB, CF son paralelas.

Digo lo segundo, que si los ángulos BLO, FOL son iguales á dos rectos, las líneas AB, CF son paralelas.

Demonstracion. ALO con BLO (13) hace dos rectos; FOL con BLO hace tambien dos rectos, segun se supone: luego ALO y FOL alternos son iguales: luego (28) las AB, CF son paralelas.

COROLARIO.

De la segunda parte se sigue, que todo rectángulo es paralelógramo.

PROP. XXX. Teorema.

Las líneas rectas paralelas á una misma, son paralelas entre sí. (fig. 24.)

Explicacion. Las rectas IK, OP son paralelas á la recta MN: digo que IK, OP son paralelas entre sí.

Preparacion. Tírese la recta LQ, que corte las líneas propuestas.

Demonstracion. Por suponerse IK, MN paralelas, los ángulos alternos IRS, RSN son iguales. (27) Tambien por suponerse MN, OP paralelas, los ángulos RSN, STP son iguales: (27) luego los ángulos alternos IRS, STP son iguales: luego las IK, OP (28) son paralelas.

PROP. XXXI. Problema.

Dada una línea recta y un punto fuera de ella, tirar una paralela que pase por el punto dado. (fig. 25.)

Explicacion. Pídese que por el punto X se tire una recta, que sea paralela á la recta dada TV.

Operacion. Elíjase en la TV un punto Z, y tírese la XZ: hágase (23) el ángulo ZXR igual al ángulo XZV, y las rectas RS, TV serán paralelas.

Demonstracion. Los ángulos alternos RXZ, VZX son iguales: (*por construccion*) luego (28) RS, TV son paralelas.

PROP.

PROP. XXXII. Teorema.

En todo triángulo los tres ángulos son iguales á dos rectos; y prolongado uno de sus lados, el ángulo exterior es igual á los dos interiores opuestos. (*fig.* 26.)

Explicacion. Digo lo primero, que los tres ángulos interiores A, B, C en qualquiera triángulo son iguales á dos rectos.

Preparacion. Por el punto A tírese la DF paralela á BC.

Demonstracion. Por ser DF, BC paralelas, son los ángulos alternos DAB, ABC iguales; (27) y por la misma razon son iguales FAC, ACB; y como por el *corol. de la prop.* 13 DAB y FAC, con BAC, hagan dos rectos, se sigue, que los internos B y C, con BAC, hacen dos rectos.

Digo lo segundo, que si un lado, como por exemplo BC, se prolonga hasta E, el ángulo exterior ACE es igual á los dos internos opuestos B y BAC.

Demonstracion. Como queda demonstrado los dos internos B y BAC, con el ángulo ACB, hacen dos rectos. Asimismo el externo ACE, con el mismo ACB, hace dos rectos: (13) luego el externo ACE es igual á los internos opuestos B y BAC. El Autor de este fecundísimo Teorema fué Pitágoras.

COROLARIOS DE LA PRIMERA PARTE.

1 *Los tres ángulos juntos de un triángulo, son iguales á los tres de otro qualquiera triángulo.*

2 *En qualquiera triángulo, si uno de sus ángulos fuere recto, los demas son agudos, y valen tanto como un recto.*

3 *Si los dos ángulos de un triángulo son iguales á dos de otro, tambien el tercer ángulo del uno será igual al tercero del otro.*

4 *De un punto solo puede salir una perpendicular á otra línea; porque de otra suerte podria haber en el triángulo dos ángulos rectos, contra el corol.* 2.

5 *De las líneas que de un punto se pueden tirar sobre otra línea, la perpendicular es la mas corta; porque esta se opone á un ángulo agudo, y las demas al recto.*

CO-

COROLARIOS DE LA SEGUNDA PARTE.

1 *El ángulo externo ACE, es mayor que qualquiera de los internos opuestos A ó B, que es la prop. 16 de Euclides.*

2 (Fig. 9.) *El ángulo I formado dentro del triángulo, y sobre su basa HL, es mayor que el ángulo G; porque el ángulo HIL externo, respecto del triángulo ILM, es mayor que el ángulo IML interno.* (corol. 1) *Asimismo este ángulo IML externo, respecto del triángulo GMH, es mayor que el ángulo G: luego el ángulo I mucho mayor es que el ángulo G, que es la segunda parte de la prop. 21. De la primera parte de esta prop. 32 se colligen las dos reglas siguientes para conocer á quántos ángulos rectos equivalen los ángulos internos de qualquiera figura rectilínea.*

REGLA PRIMERA.

Duplíquese el número, que por su órden, contando desde el triángulo, le toca á la figura, y á tantos rectos equivaldrán los ángulos internos de dicha figura. El triángulo es la primera figura, la de quatro lados es la segunda, la de cinco lados es la tercera, &c. Pues porque el triángulo es la primera, y uno y uno son dos, sus ángulos equivalen á dos rectos. La segunda es la quadrilátera; y porque dos y dos son quatro, sus ángulos equivalen á quatro rectos. La tercera es la de cinco lados; y porque tres y tres son seis, sus ángulos hacen seis rectos.

Demonstracion. (*fig.* 27.) La figura de cinco lados tiradas las rectas NM, NO, se divide en tres triángulos, cuyos ángulos componen los de dicha figura: los ángulos de estos tres triángulos hacen seis rectos, cada uno dos: luego los ángulos de la tercera figura, que es la de cinco lados, hacen seis rectos. Semejante demonstracion se puede hacer en las demas.

REGLA SEGUNDA.

Duplíquese el número de lados que tiene la figura: del número que resultare quítense quatro, y á tantos rectos equivaldrán los ángulos internos de la figura.

Exemplo. En la figura de cinco lados, duplicando los lados, sale el número 10, quitando quatro, quedan seis.

Di-

Digo que los ángulos de la figura de cinco lados equivalen á seis rectos.

Demonstracion. (*fig.* 28.) Señálese dentro de la figura el punto O, y tiradas las rectas ON, OQ, &c. queda dividida la figura en cinco triángulos, cuyos ángulos equivalen á diez rectos, cada uno á dos; y porque los ángulos en O no pertenecen á los ángulos de la figura, quitados estos, el resíduo serán los ángulos de la figura: y como los ángulos en O equivalgan á un círculo, que se puede describir desde O, el qual es justamente quatro rectos, se sigue, que si quitamos quatro de los diez rectos, el resíduo seis será el número de ángulos rectos á que equivalen los ángulos de dicha figura.

De aquí se infiere, que si se prolongan los lados de la figura hasta S, hasta T, &c. todos los ángulos exteriores juntos siempre equivalen justamente á quatro rectos; porque el exterior NQS, con su interior NQP, hace dos rectos; (13) tambien QPT, con MPQ, otros dos rectos: luego todos los cinco exteriores harán diez rectos; y quitados los interiores, que como dixe hacen seis rectos, los exteriores harán quatro rectos. Con que no tienen mas valor los mil ángulos exteriores juntos de la figura de mil lados, que los cinco de la figura de cinco lados.

PROP. XXXIII. Teorema.

Las rectas que unen dos rectas paralelas é iguales de una misma parte, son tambien paralelas é iguales. (*fig.*29.)

Explicacion. Las rectas TX, VZ unen las dos TV, XZ, que son iguales y paralelas: digo que las TX, VZ serán tambien paralelas é iguales.

Preparacion. Tírese la diagonal TZ.

Demonstracion. Por ser TV, XZ paralelas, serán los ángulos VTZ, TZX iguales. (27) Con que los triángulos VTZ, TZX tienen los lados TV, XZ iguales por suposicion, y TZ comun, y los ángulos comprehendidos VTZ, TZX iguales: luego (4) son totalmente iguales: luego los ángulos alternos VZT, ZTX son iguales; y las TX, VZ iguales y paralelas. (28)

PROP. XXXIV. Teorema.

En todo paralelógramo, los lados y ángulos opuestos son iguales, y la diagonal le divide en dos partes iguales. (*fig.* 29.)

Explicacion. Digo que en el paralelógramo XV, los lados y ángulos opuestos son iguales; y que la diagonal TZ le divide en dos partes iguales.

Demonstracion. Por ser los lados TV, XZ paralelos, serán los ángulos alternos VTZ, TZX iguales: (27) asimismo, por ser paralelos los lados TX, VZ, serán los ángulos TZV, ZTX iguales: luego todo el ángulo T es igual á todo Z. Tambien los triángulos TVZ, TXZ tienen el lado TZ comun, y los dos ángulos sobre ese lado en el uno iguales á los dos del otro, cada uno á su semejante: luego (26) son totalmente iguales: luego los ángulos VX son iguales; y el lado TV es igual á XZ, como tambien TX á VZ, y todo el paralelógramo queda dividido en dos triángulos iguales.

PROP. XXXV. y XXXVI.

Los paralelógramos que tienen una misma ó igual basa, y están entre unas mismas paralelas, son iguales. (*fig.* 30.)

Explicacion. Los paralelógramos CABD, CEFD tienen una misma basa CD, y están entre las dos paralelas AF, CD. Digo que son iguales.

Demonstracion. Los triángulos ACE, BDF tienen el lado AC igual al lado BD; y el lado CE al lado DF. (34) Y siendo tanto AB, como EF iguales con CD, son iguales entre sí; y añadiendo á entrambas BE comun, serán AE, BF iguales: luego los tres lados del triángulo CAE son iguales á los tres del triángulo DBF: luego (8) son iguales: quítese á entrambos el triángulo BOE, que es comun, y quedarán los trapezios blancos iguales: añádase á entrambos el triángulo COD, y resultarán los paralelógramos CABD, CEFD iguales. Lo mismo es que tengan una basa CD, ó que sean diferentes miéntras sean iguales.

PROP.

PROP. XXXVII. y XXXVIII.

Los triángulos que tienen una misma ó igual basa, y están entre unas mismas paralelas, son iguales. (*fig.* 31.)

Explicacion. Los triángulos GHI, GLI tienen la misma basa GI, y están entre las mismas paralelas HM, GI. Digo que son iguales.

Preparacion. Tírese IK paralela á GH, y la IM paralela á GL.

Demonstracion. Los quadriláteros GK, GM son paralelógramos (*def.* 36.) é iguales: (35) luego los triángulos GHI, GLI, que son sus mitades, (34) tambien serán iguales.

PROP. XXXIX. y XL. Teoremas.

Los triángulos iguales que tienen una misma ó igual basa y constituidos á una misma parte, están entre unas mismas paralelas. (*fig.* 32.)

Explicacion. Sean los triángulos iguales NPO, NQO constituidos sobre la misma basa NO, y á una misma parte. Digo que PQ tirada por los vértices, será paralela á NO.

Preparacion. Si la PQ no es paralela á NO: luego alguna otra lo será: sea pues RQ; alárguese OP hasta R, y tírese la RN.

Demonstracion. Los triángulos NRO, NQO tienen una misma basa NO, y segun este supuesto, están entre las paralelas RQ, NO: luego (37) son iguales: el triángulo NPO se supone tambien igual al NQO: luego los triángulos NRO, NPO son iguales, siendo así que el uno es parte del otro, lo que es absurdo: luego ni RQ ni otra alguna distinta de PQ, es paralela á NO: luego sola PQ es paralela á la basa.

PROP. XLI. Teorema.

Si un paralelógramo y un triángulo tienen una misma ó igual basa, y están entre unas mismas paralelas, el paralelógramo será duplo del triángulo. (*fig.* 33.)

Explicacion. El paralelógramo STVX y el triángulo

YZR tienen las basas SX, YR iguales, y están entre las paralelas TZ, SR. Digo que el paralelógramo STVX es doblado del triángulo YZR.

Preparacion. Tirese la diagonal TX.

Demonstracion. El triángulo STX es igual al triángulo YZR; (38) el triángulo STX es la mitad del paralelógramo SV: (34) luego el triángulo YZR es la mitad de dicho paralelógramo, y este doblado de dicho triángulo.

RROP. XLII. Problema.

Hacer un paralelógramo igual á un triángulo dado, y que tenga un ángulo igual á otro ángulo rectilíneo dado. (fig. 34.)

Explicacion. Sea el triángulo BCA, y se pide que se haga un paralelógramo que sea igual á dicho triángulo, y que uno de sus ángulos sea igual al ángulo E.

Operacion. Por el punto C tírese la CH paralela á AB: (31) pártase la AB por medio en F: hágase el ángulo AFG igual al ángulo E: (23) tírese AH paralela á FG, y queda hecho lo que se manda.

Preparacion. Tirese la recta CF.

Demonstracion. Lo primero, el paralelógramo AFGH tiene el ángulo F igual al ángulo E por la construccion. Lo segundo, el triángulo FCA es mitad del paralelógramo AFGH; (41) y el triángulo BCF es tambien mitad del mismo paralelógramo: luego todo el triángulo BCA es dos mitades del dicho paralelógramo: luego el triángulo BCA y el paralelógramo son iguales.

PROP. XLIII. Teorema.

En todo paralelógramo los complementos son iguales.

Explicacion. Digo que en el paralelógramo VPTQ los complementos ST, SV son iguales. (*fig.* 6.)

Demonstracion. Los triángulos totales PTQ, PVQ son iguales, (34) y por la misma lo es el triángulo PXS á PRS, y SYQ á SZQ, que quitados unos y otros de los totales, quedarán los complementos ST, SV iguales.

PROP.

PROP. XLIV. Problema.

Dado un triángulo y una línea recta, describir sobre ella un paralelógramo igual al triángulo, y que tenga un ángulo igual á otro ángulo dado. (*fig.* 35.)

Explicacion. Pídese se haga un paralelógramo que sea igual al triángulo HIK, y que uno de sus lados sea igual á la recta G, y tenga un ángulo igual al ángulo D.

Operacion. Hágase (42) el paralelógramo HPQR igual al triángulo HIK, y que tenga el ángulo HRQ igual al ángulo D. Prolónguese la QP hasta que PL sea igual á la línea dada G. Tírese la LH larga á discrecion, y prolónguese QR hasta que encuentre la LH en M: tírese la línea LO paralela á PH: alárguese KH hasta que encuentre con la LO en N: tírese MO paralela á KN, y alargando la PH hasta S, quedará formado el paralelógramo ONHS con las condiciones que se piden.

Demonstracion. Lo primero: el paralelógramo ONHS es igual al paralelógramo HPQR, (43) y este paralelógramo HPQR es (*por construccion*) igual al triángulo HIK: luego el paralelógramo ONHS es igual al triángulo HIK.

Lo segundo. Por ser NH, OS paralelas, la línea PS entra en ellas, formando los ángulos NHP, OSH iguales; (29) y asimismo por ser PS, QM paralelas, los ángulos NHP, HRQ son iguales: luego siendo el ángulo NHP igual, tanto con OSH, como con HRQ, estos ángulos serán iguales: y siendo (*por construccion*) HRQ igual al ángulo D, tambien lo será el ángulo OSH.

Lo tercero. La NH es igual á LP, (34) y esta es (*por construccion*) igual á la dada G: luego el lado NH es igual á G; luego el paralelógramo ONHS tiene todas las condiciones que se piden.

PROP. XLV. Problema.

Hacer un paralelógramo igual á una figura rectilínea dada, y que tenga un ángulo igual á un ángulo dado. (*fig.*36.)

Resuelve este Problema Euclídes con modo muy trabajoso; y así doy otro mas fácil, cuya generalidad se verá latamente en la Geometría práctica.

Ex-

Explicacion. Pídese se haga un paralelógramo igual al rectilíneo TVXZ, que tenga un ángulo igual al ángulo O.

Operacion. Lo primero, se reducirá el rectilíneo á triángulo en la forma siguiente: Tírese la recta VZ; alárguese TZ hácia Y á discrecion; tírese XY paralela á la VZ; tírese VY, y el triángulo TVY será igual al rectilíneo TVXZ. Lo segundo, hágase (42) un paralelógramo que sea igual al triángulo TVY, y que tenga un ángulo igual á O, y quedará hecho lo que se manda.

Demonstracion. Los triángulos VXZ, VYZ tienen una misma basa VZ, y están entre las paralelas VZ, XY: luego (37) son iguales: luego añadiendo á entrambos el triángulo TVZ, resultarán TVXZ, que es el rectilíneo dado, y el triángulo TVY iguales: luego el paralelógramo que se hiciere igual á este triángulo, será igual al rectilíneo TVXZ.

PROP. XLVI. Problema.

Hacer un quadrado sobre una recta dada AB. (*fig.* 37.)

Operacion. Levántense las perpendiculares AC, BD iguales á la recta AB, y tirando la CD quedará formado el quadrado.

Demonstracion. Las líneas AC, BD son iguales (*por construccion*) y paralelas (29): luego CD, AB son paralelas é iguales: (33) luego la figura descrita es paralelógrama y equilátera: y siendo los ángulos A y B rectos, tambien lo son (34) los ángulos C y D, y por consiguiente la figura ACDB es quadrado.

PROP. XLVII. Teorema.

En todo triángulo rectángulo el quadrado del lado opuesto al ángulo recto, es igual á los quadrados de los otros dos lados. (*fig.* 38.)

Explicacion. Sea el triángulo EGF, cuyo ángulo G sea recto. Digo que el quadrado EHIF hecho del lado EF opuesto al ángulo recto G, es igual á los dos quadrados juntos GMLF, ECDG hechos de los otros lados.

Preparacion. Tírese la GK paralela á FI. No hay duda, que si demonstrare que el paralelógramo KNFI es igual

igual al quadrado GMLF, y que el paralelógramo HENK es igual al quadrado ECDG que habré demonstrado, que todo el quadrado HF es igual á los dos FM, ED. Pues para demonstrar que el paralelógramo KNFI es igual al quadrado FM, tírense las rectas EL, GI.

Demonstracion. Considérense los triángulos ELF, GIF, y se verá, que EF lado del triángulo ELF, es igual á FI lado del triángulo GIF, por ser EF, FI lados de un quadrado; asimismo FL lado del triángulo ELF, es igual á GF lado de GIF: luego dichos triángulos tienen dos lados del uno iguales á dos del otro. Ademas de esto, el ángulo EFL comprehendido de dichos lados en el uno, es igual al ángulo GFI comprehendido de semejantes lados en el otro; porque si á los rectos GFL, EFI se añade el comun GFE, resultan iguales los ángulos EFL, GFI: luego dichos triángulos ELF, GIF son iguales. (4) Tambien por tener el triángulo ELF y el quadrado FM una misma basa FL, y estar entre las paralelas EGM, FL, es el triángulo la mitad del quadrado FM: (41) asimismo por tener el triángulo IGF y el paralelógramo KF una misma basa IF, y estar entre las paralelas GK, FI, es el triángulo la mitad del paralelógramo KF: luego la mitad del paralelógramo KNFI y la mitad del quadrado FGML son iguales: luego todo el paralelógramo KF es igual á todo el quadrado FM. De la misma suerte probaré ser igual el paralelógramo HENK al quadrado ECDG: luego todo el quadrado HEFI es igual á los dos quadrados juntos.

He dado por supuesto, que así como MG es paralela á LF, tambien lo es toda la MGE; y es evidente, porque el ángulo FGM es recto por construccion, y FGE por suposicion; luego (14) MG, GE son una recta, y siendo la porcion MG paralela á LF, tambien lo será GE.

Este nobilísimo Teorema ha enriquecido todas las Matemáticas, como se verá en el discurso de esta obra: su inventor fué Pitágoras, que segun Proclo, Vitruvio y otros, ofreció víctimas á las Musas en hacimiento de gracias por tan provechosa invencion: donde se vé no tuvo el conocimiento del verdadero Dios, fuente de la Sabiduría verdadera; y si le tuvo, *non sicut Deum glorificávit*.

PROP.

PROP. XLVIII. Teorema.

Si el quadrado de un lado de un triángulo es igual á los quadrados de los otros dos lados, el ángulo opuesto á aquel lado será recto. (*fig.* 39.)

Explicacion. En el triángulo NOP se supone, que el quadrado del lado NP es igual á los quadrados de NO y OP. Digo que el ángulo NOP es recto.

Preparacion. Tírese la QO perpendicular á OP é igual á ON, y tírese QP.

Demonstracion. Por ser el ángulo QOP recto (*por construc.*) será (47) el quadrado de QP igual á los quadrados de QO y de OP: y como OQ sea igual á ON, será el quadrado de QP igual á los quadrados de NO y OP: y como (*por suposicion*) el quadrado de NP sea igual á los mismos quadrados de NO y OP, se sigue ser el quadrado de NP igual al de QP: luego NP y QP son iguales. De que se infiere, que los triángulos NOP, QOP tienen los lados ON, OQ iguales, como tambien NP y QP, y OP comun: luego (8) son totalmente iguales: luego el ángulo NOP es igual al ángulo QOP; y siendo (*por construccion*) QOP recto, tambien lo será NOP.

LIBRO II.

Trata Euclídes en este libro de la potencia de las líneas, cuyos Teoremas son de singular utilidad, especialmente para demonstrar los fundamentos de la Algebra; y aunque de sí son algo obscuros, no por eso debe amedrentarse el principiante si halla alguna dificultad en percibirles: esta procuraré minorar, explicándoles con la mayor claridad, que me será posible.

DEFINICIONES.

1 *Potencia de dos líneas, es el paralelógramo rectángulo, que se forma ó se puede formar de ellas.*

Explicacion. (*fig.* 1.) La potencia de las dos líneas CB, CD

CD es el paralelógramo rectángulo A, que se forma de ellas, juntándolas de modo, que formen el ángulo recto C. La razon por que se dice formarse de ellas dicho paralelógramo es, porque este solamente tiene dos dimensiones, longitud y latitud; y de las dos líneas, la una, como por exemplo CB, determina la longitud; y la otra CD la latitud; y tambien porque el paralelógramo se engendra del movimiento de la perpendicular DC sobre CB, de suerte, que si la DC conservándose perpendicular, se mueve sobre CB, en habiendo llegado á B, habrá formado el paralelógramo rectángulo A.

En esto se funda, que supuesta en números la cantidad de las líneas CB, CD, si se multiplica la una por la otra, se producirá el rectángulo. Supóngase pues, que en el paralelógramo EGHF, la EF es de tres palmos, y la EG de dos: es cierto, que el dicho paralelógramo será seis; esto es, será seis palmos quadrados; y la razon es clara, porque si sola la EQ de un palmo se moviera sobre EF, en llegando á K formaria un quadrado en EN; y en llegando á L hubiera hecho los dos EO; y en llegando á F los tres EP: luego porque EG es dos palmos, en llegando á K habrá formado los dos quadrados EN, QI; en llegando á L, los quatro EM; y en F, los seis EH, que es todo el rectángulo.

La potencia de una línea es el quadrado que se forma de ella ó se puede formar. Y potencias de dos ó mas líneas, son los quadrados que de ellas se pueden formar. Y así la potencia de la línea CD (*fig.* 2.) es el quadrado M; y la potencia de EF es el quadrado N; y los dos quadrados son las potencias de dichas líneas. Donde se vé la diferencia entre *potencia de dos líneas*, y *potencias de dos líneas*, que aquella es el rectángulo que de ellas se forma, y estas son sus quadrados.

2 *En qualquiera paralelógramo, uno de los rectángulos cortados de la diagonal, como EG, con los dos complementos FE, GH, se llama Gnomon.*

Advierto, que quando los quadrados y paralelógramos están formados, se nombran con solas dos letras de las que hay en sus ángulos opuestos; pero quando no están formados, se nombran con las mismas líneas de que se pueden

den formar: como el quadrado CD es el que se puede formar de CD, el rectángulo de BC, BA es el que dichas rectas pueden formar. Quando las dos rectas tienen un punto comun, se nombra su rectángulo con solas tres letras: como el rectángulo PQR es el que se puede formar de las rectas PQ, QR; el rectángulo PRQ es el que se puede formar de toda la PR y del segmento RQ. Advierto tambien, que en nombrando *rectángulo* absolutamente, se ha de entender el paralelógramo rectángulo.

PROP. I. Teorema.

Propuestas dos rectas RV, RX, (fig. 3.) y una de ellas RV, dividida en qualesquiera partes en S, T, el rectángulo RZ formado de las dos, es igual á los rectángulos RP, SQ, TZ formados de la RX y de cada segmento RS, ST, TV de la otra.

Demonstracion. Moviéndose la perpendicular RX sobre la RV, engendra el paralelógramo RZ; y moviéndose por la RS, forma el rectángulo RP, y por ST forma SQ, y por TV el TZ: luego todos juntos son iguales al rectángulo RZ producido del tránsito de RX por toda RV.

Demuéstrase tambien en números. Sea RS 2 pies; ST sea 3, y TV sea 4, y toda RV 9, sea la RX 5. Multiplíquese RX 5 por RV 9, y será todo el rectángulo RZ 45. Tambien multiplicando RX 5 por RS 2, resulta el rectángulo RP 10, y multiplicando PS 5 por ST 3, será el rectángulo SQ 15, y multiplicando QT 5 por TV 4, saldrá TZ 20, y todos juntos hacen 45, que es el rectángulo total RZ.

PROP. II. Teorema.

Si la recta AB (fig. 4.) se divide en C en qualesquiera partes, los rectángulos AF, CE hechos de toda la AB ó AD su igual, y de los segmentos AC, CB, son iguales al quadrado AE de toda la recta AB.

Demonstr. Siendo como se supone AD igual con AB, moviéndose sobre AB, en llegando al extremo B habrá producido el quadrado AE: y como moviéndose por AC forma el rectángulo AF, y moviéndose por CB forme el rectángulo CE, se sigue ser los dos rectángulos iguales al quadrado AE.

En

En números. Sea AD ó AB 9; con que el quadrado AE será el producto de 9 por 9, que es 81. Sea AC 4, y el rectángulo AF será 36. Sea CB 5, y el rectángulo CE será 45, y los dos juntos hacen 81 quadrado AE.

PROP. III. Teorema.

Si una recta GH (fig. 5.) se divide como quiera en dos partes en I, el rectángulo GM hecho de toda la GH y de GK igual á GI, es igual al quadrado de GI que es GL, y al rectángulo IM hecho de IL igual á GI y del segmento IH.

Demonstracion. Si GK igual á GI se mueve sobre GI, engendra al quadrado GL; y moviéndose de I hasta H, engendra el rectángulo IM; y habiendo con esto corrido desde G hasta H, quedará formado el rectángulo GM compuesto del quadrado GL y del rectángulo IM.

En números. Sea GI 4, y sea IH 3, y toda la GH 7: luego el quadrado GL es 16, y el rectángulo IM será 12, y los dos juntos 28, que es el mismo producto de GI 4 por GH 7, que tambien es 28.

PROP. IV. Teorema.

Si una recta MO (fig. 6.) se divide en N en qualesquiera dos partes, será el quadrado MV de toda la MO igual á los quadrados de los segmentos MN, NO y á dos rectángulos hechos de los mismos segmentos.

Preparacion. Córtese OQ igual á ON, y quedará QV igual á NM: tírese QP paralela á OM, que tambien lo será con VS: tírese NT paralela á OV, que será tambien paralela á MS.

Demonstracion. NQ es (*por construc.*) paralelógramo de lados iguales; y siendo el ángulo O recto, tambien lo será el ángulo R: (34, 1) luego NQ es el quadrado del segmento NO. Asimismo probaré ser PT quadrado del segmento ST, ó de su igual MN. Esto supuesto, por estar la MO dividida en dos partes en N, será (2) el quadrado MV igual á los rectángulos MT, NV. Tambien

por

por estar MS dividida en P, el rectángulo MT hecho de toda SM y del segmento SP ú de su igual ST, será igual al quadrado PT y al rectángulo MR hecho de los segmentos PM, PS (3) ú de MN, NO sus iguales. Asimismo probaré ser el rectángulo NV igual al quadrado NQ y al rectángulo RV hecho de RQ ó NO y de QV ó MN: luego todo el quadrado MV se compone justamente de los quadrados de MN, NO y de dos rectángulos de MN, NO: luego es igual á ellos.

En números. MN sea 4, y NO 2, toda MO será 6: con que el quadrado MV es 36. Tambien el quadrado NQ será 4, el quadrado PT será 16, y los rectángulos MR, RV será cada uno 8, y todo esto junto 36.

PROP. V. Teorema.

Si una recta ST (fig. 7.) se divide por medio en M y desigualmente en N, será el rectángulo formado de las dos partes desiguales SN, NT, junto con el quadrado de la intermedia MN, igual al quadrado de MT mitad de la línea.

Preparacion. Hecho el quadrado MZ sobre la MT, tómese TR igual á TN, y tiradas las RO, NY paralelas á los lados del quadrado, se alargará la RO hasta perficionar el rectángulo SO.

Demonstracion. OY es el quadrado de MN, como se probó en la proposicion pasada; y SQ es el rectángulo de SN, NT ó NQ su igual. Esto supuesto, por ser TZ ó MT igual á SM, y NT ó TR igual á OM, son los rectángulos NZ, SO iguales; y añadiendo á entrambos el comun MQ, será el rectángulo SQ igual al Gnomon OTY: añádase á entrambos el quadrado OY, y será el rectángulo SQ, junto con el quadrado OY, igual al quadrado MZ hecho de MT mitad de ST.

En números. Tenga ST 10 partes; esto es, SM 5, MN 3, y NT 2. El rectángulo hecho de SN 8, y NQ 2, es 16, que junto con el quadrado de MN, que es 9, hace 25; lo que es igual al quadrado de 5, mitad de la línea ST.

PROP.

PROP. VI. Teorema.

Si una recta (fig. 8.) AB se divide por medio en C, en derechura se le añade otra recta BD, el rectángulo de la compuesta AD y de la añadida BD, esto es, el rectángulo ADB, junto con el quadrado de la mitad CB de la propuesta, es igual al quadrado de CD, que es compuesta de la dicha mitad y la añadida.

Preparacion. Sobre CD fórmese el quadrado CE, y tomando DH igual á la añadida BD, se formará el rectángulo AH, y se tirará BG paralela á DE.

Demonstracion. (4) LG es el quadrado de CB, y KE es igual á CK; y siendo CK (36, 1) igual á AL, será KE igual á AL: añádase á entrambos el rectángulo CH, y será AH igual al Gnomon LDG: añádase á entrambos el quadrado LG, y será AH, junto con el quadrado LG, igual al quadrado CE; esto es, el rectángulo ADB, junto con el quadrado de CB, igual al quadrado de CD.

En números. Sea AB 8, AC 4, y CB otras 4, y BD sea 5: con que toda AD es 13, que multiplicados por 5 de EH igual á DB, producen 65, área del rectángulo AH, que junto con el quadrado de CB 16, hacen 81 iguales al quadrado de CD 9, que es 81.

PROP. VII. Teorema.

Si una recta MN (fig. 9.) se divide en dos partes como quiera en L, será el quadrado MQ hecho de toda, junto con el quadrado SL hecho de una de sus partes ML, igual al quadrado de la otra parte LN y á dos rectángulos comprehendidos de toda NM y de la parte ML.

Preparacion. Continúese TL hasta V, y tomando PO igual á ML, tírese la PX paralela á MN.

Demonstracion. Los quadrados MQ, SL juntos se componen del rectángulo SR hecho de PS, ST ú de MN, ML sus iguales, y del rectángulo PQ hecho de PX y PO ú de MN, ML sus iguales, y del quadrado LX: luego los quadrados de las rectas MN, ML son iguales á dos rectángulos NML y al quadrado de NL.

Por números. Sea MN 5, y ML 2: con que el quadrado MQ es 25, y el quadrado SL es 4, y juntos son 29.

Asi-

Asimismo el rectángulo NML es 10, y tomado dos veces es 20, y añadido el quadrado 9 de NL, que es 3, es todo tambien 29.

PROP. VIII. Teorema.

Si una recta AB (fig. 10.) se divide por medio en C y se le añade en derechura otra BD, el quadrado de toda la compuesta AD será igual á 4 rectángulos ACD; esto es, hechos de la mitad AC y de la CD compuesta de la otra mitad y la añadida, juntamente con el quadrado de la añadida BD.

Preparacion. Fórmese sobre AD su quadrado AX; tírense las CR, BQ paralelas á AZ; y tirada la diagonal ZD por los puntos O y H en que corta dichas paralelas, tírense las EL, FK paralelas á AD.

Demonstracion. El quadrado AX se compone justamente del quadrado de BD, que es BK: de los tres rectángulos LR, KO, AO, que cada uno tiene un lado igual á CD y otro igual á AC, y de ER y GH, que juntos hacen otro rectángulo igual á AO, por ser ER igual á FO, y CH igual á AG: luego el quadrado total es igual á todo lo propuesto.

Por números. Sea AB 6, y BD 4: con que toda AD es 10, y su quadrado es 100. Y siendo AC 3, y CD 7, el rectángulo ACD es 21, y tomado quatro veces son 84, y añadiendo el quadrado de BD 16, resultan justamente 100.

PROP. IX. Teorema.

Si una recta PR (fig. 11.) se divide en dos partes iguales en X y en dos desiguales en Z, los quadrados de las desiguales PZ, ZR serán duplos de los quadrados de PX mitad de la recta y de XZ segmento intermedio.

Preparacion. Levántese la perpendicular XO igual á XR, y júntense OP, OR: del punto Z levántese la perpendicular ZH: tírese HI paralela á ZX, y júntese PH.

Demonstracion. Por ser PX, XO iguales, los ángulos XPO, XOP son iguales, (5, 1) y por ser el ángulo X recto, será cada uno de aquellos semirecto; y por la misma causa son semirectos los ZHR y R: luego el triángulo HZR tiene el ángulo R semirecto; y como Z sea recto, será ZHR tambien semirecto: luego (6, 1) las líneas ZH,

ZR

ZR son iguales. Tambien por ser las IH, XZ paralelas, los ángulos I, X son iguales; (27, 1) y siendo X recto, tambien lo será el ángulo I; y por ser IOH semirecto, tambien OHI será semirecto, y las líneas IO, IH serán iguales; y como IH sea igual con XZ, tambien lo será OI. Esto supuesto,

En el triángulo POX el quadrado de PO es igual á los quadrados de PX, XO; y como estos sean iguales, será el quadrado de PO duplo del quadrado de PX: asimismo el quadrado de OH es duplo del quadrado de IH; y por ser IH, XZ iguales, el quadrado de OH es duplo del quadrado de XZ. Tambien porque el ángulo O se compone de dos semirectos POX, ROX, es recto: luego (47, 1) el quadrado de PH es igual á los quadrados de PO, OH; y siendo estos doblados de los quadrados de PX, XZ, será el mismo quadrado de PH duplo de los quadrados de PX, XZ; y el mismo quadrado de PH es igual á los quadrados de PZ, ZH, ú de su igual ZR: luego los quadrados de PZ, ZR son duplos de los quadrados de PX, XZ.

Por números. Sea PR 10, PZ 8, ZR 2. El quadrado de PZ será 64, y el de ZR será 4, y juntos son 68. Y esta suma es doblada de la suma de 25 quadrado de PX, y de 9 quadrado de XZ, que es 34.

PROP. X. Teorema.

Si una línea AB (fig. 12.) se parte por medio en C, y en derecho se le añade otra BD, será el quadrado de toda la compuesta AD, con el quadrado de la añadida BD, duplo del quadrado de la mitad AC, y del quadrado de CD compuesta de la otra mitad y de la añadida.

Preparacion. Levántese la perpendicular CE igual á CB: tírese FD tambien perpendicular é igual á EC, y extiéndase hácia G á discrecion: tírense AE, EB, y alárguese esta hasta que corte á la FG en G: últimamente tírense las EF, AG.

Demonstracion. Por lo dicho en la antecedente, es el ángulo total E recto, y el ángulo EBC semirecto, y (15, 1) el el ángulo DBG tambien es semirecto; y porque el ángulo D es recto, será (32, 1) el ángulo DGB semirecto; y (6, 1) las líneas DB, DG iguales. Tambien por ser el ángulo F recto y FGE semirecto, tambien lo será el ángulo FEG: luego FE, FG son iguales, como tambien EF, CD. (33, 1) Esto supuesto, por ser el ángulo C recto, es el quadrado de AE (47, 1) igual á los quadrados de AG, CE; y por ser estos iguales, será el quadrado de AE duplo del quadrado de AC. Tambien por ser el ángulo F recto, es el quadrado de EG igual á los quadrados de EF, FG, que por ser estos iguales, será duplo del quadrado de EF; esto es, del quadrado de CD. Asimismo, porque el ángulo AEG es recto, es el quadrado de AG igual á los quadrados de AE, EG: luego el quadrado dicho de AG es duplo de los quadrados de AC, CD: y como por el ángulo recto D sean los quadrados de AD, DG; esto es, de AD, DB iguales al quadrado de AG, se sigue ser los quadrados de AD, DB duplos de los quadrados AC, CD.

Por números. Sea AB 6, AC 3, BD 4. Será AD 10; y su quadrado será 100, que junto con 16 quadrado de BD, son 116, lo que es duplo del quadrado de AC 9, y de 49 quadrado de CD; porque estos juntos hacen 58, mitad de 116.

PROP. XI. Problema.

Dividir una línea en dos partes, tales, que el rectángulo hecho de toda la línea y un segmento, sea igual al quadrado del otro segmento. (fig. 13.)

Operacion. Sobre la línea dada HI descríbase el quadrado HL, (46, 1) cuyo lado MH divídase por medio en P: tírese la PI; hágase la PO igual á PI, y córtese HK igual á HO. Digo que la línea HI queda dividida de tal manera en K, que el rectángulo de toda HI y del segmento KI, es igual al quadrado del segmento HK.

Preparacion. Perficiónese el quadrado OK, y el lado SK continúese hasta N.

Demonstracion. Lo que se ha de probar es, que el rectángulo KL hecho de IL ú IH su igual y de IK, es igual al quadrado OK del segmento HK. Pruébase así: La

MH

MH está dividida por medio en P, y en derechura se le añadió la HO: luego (6) el rectángulo MS hecho de toda la compuesta MO, y de la añadida HO ú OS su igual, junto con el quadrado de PH, es igual al quadrado de PO ú de su igual PI; y pues (47, 1) el quadrado de PI es igual al quadrado de PE y al quadrado de HI, que es el quadrado HL, será

El rectángulo MS y el quadrado de PH	iguales	al quadrado HL y al quadrado de PH.

Quítese á entrambas partes el quadrado de PH, y quedará el rectángulo MS igual al quadrado HL. Quítese á entrambos el rectángulo comun HN, y quedará el quadrado OK igual al rectángulo KL. Esta proposicion no se puede explicar por números.

PROP. XII. Teorema.

En todo triángulo obtusángulo RQS (fig. 14.) el quadrado del lado RS opuesto al angulo obtuso Q, es igual á los quadrados de los lados RQ, QS, y á dos rectángulos hechos de SQ sobre quien cae la perpendicular RT y de QT, porcion añadida á SQ, hasta dicha perpendicular.

Demonstr. En el triángulo RTS, por ser el ángulo T recto, es (47, 1) el quadrado de RS igual á los quadrados de RT, TS: y pues este quadrado de TS, es (4) igual á los quadrados de TQ y QS, y á dos rectángulos hechos de SQ, QT; será el quadrado de RS igual á los quadrados de RT, TQ, QS y á dos rectángulos de SQ y QT: en lugar pues de los quadrados RT, TQ, substitúyase el quadrado de RQ, que (47, 1) es igual á entrambos, y será el quadrado de RS igual al quadrado de RQ; y al de QS y á dos rectángulos de SQ y QT.

PROP. XIII. Teorema.

En todo triángulo XVZ (fig. 15.) el quadrado del lado VZ opuesto al ángulo agudo X, juntamente con dos rectángulos hechos de ZX, XY; esto es, del lado en quien cae la perpendicular VY y del segmento contenido entre dicho ángulo y la perpendicular, todo lo dicho es igual á los quadrados de los otros lados XV, XZ.

Demonstracion. Por estar la XZ dividida en Y, será

(7) el quadrado de toda XZ, junto con el quadrado del segmento XY, igual á dos rectángulos ZXY, juntos con el quadrado de YZ: añádase á entrambas partes el quadrado de la perpendicular VY, y serán los quadrados de ZX, XY, VY iguales á dos rectángulos ZXY, y á los quadrados de VY, YZ. En lugar de estos dos quadrados póngase el quadrado de VZ, que (47, 1) es igual á ellos: como tambien en lugar de los quadrados XY, VY, póngase el quadrado de VX, y serán los quadrados de XZ, XV iguales á dos rectángulos ZXY y al quadrado de VZ.

PROP. XIV. Problema.

Hacer un quadrado igual á un rectilíneo dado. (*fig.* 16.)

Explicacion. Pídese se haga un quadrado igual al rectilíneo dado A.

Operacion. Hágase (45, 1) un rectángulo igual al rectilíneo dado A, y sea ZX, y si este fuere quadrado, no habia mas que hacer; pero no siéndolo, alárguese XN hasta P de suerte, que NP sea igual á NZ: divídase la PX por medio en M, y con el intervalo MP descríbase un semicírculo: continúese ZN, hasta que encuentre en O con la circunferencia, y la línea NO servirá de lado para el quadrado, que será igual al rectilíneo A.

La demonstracion se hallará muy fácil en el *corolario* de la *proposicion* 17 del *lib.* 6, y ántes no será menester.

LIBRO III.

DEFINICIONES.

1 *Círculos iguales son aquellos, cuyos diámetros ó semidiámetros son iguales.*

2 *Línea tangente, es la que toca al círculo*: y aquella se dice toca al círculo, que encontrando con su periferia, no la corta, aunque pase mas adelante, como la línea AB (*fig.* 1.) que toca al círculo en C.

3 Cir-

3 *Círculos tangentes son aquellos, cuyas periferias se encuentran sin cortarse*: y este contacto puede ser interior, como en los círculos A y B; (*fig.* 2.) ó exterior, como en los círculos A y C.

4 *Cuerda ó subtensa, es qualquiera recta tirada dentro del círculo, que por ambas partes se termina en la periferia*, como EF, GH. (*fig.* 3.) Las cuerdas distan igualmente del centro C, quando las perpendiculares CI, CK que vienen á ellas del centro, son iguales.

5 *Segmento de círculo, es una figura comprehendida de la periferia del círculo y la cuerda*, como MON ó MPN. (*fig.* 4.)

6 *Angulo del segmento, es el ángulo mixtilíneo que hace la periferia con la cuerda*, como OMN ó PMN.

7 *Un ángulo se dice estar en el segmento, quando le forman dos cuerdas en la periferia del círculo*; y así el ángulo EGH está en el segmento EGH. (*fig.* 5.)

8 *Ese mismo ángulo se dice que insiste en la periferia opuesta EIH*: de suerte, que está en el segmento EGH, é insiste en la periferia EIH.

9 *Sector, es una figura contenida de dos semidiámetros y del arco comprehendido entre ellos*, como LKM.

PROP. I. Problema.

Hallar el centro del círculo. (*fig.* 6.)

Operacion. Tírese qualquiera cuerda MN: divídase por medio en S; y por S tírese la perpendicular PQ: divídase esta por medio en O, y el punto O será el centro.

Preparacion. Si el centro está en la PQ, necesariamente ha de ser O, que está en medio de ella; porque de otra suerte no serian iguales las rectas del centro á la circunferencia: con que solo nos falta demonstrar, que el centro no puede estar fuera de la PQ, como en el punto R. Si alguno pues dixere ser R el centro, tírense las RM, RS, RN.

Demonstracion. En los triángulos RSM, RSN, los lados MS, SN son iguales, (*por construccion*) RS es comun; y los lados RM, RN iguales, por ser semidiámetros segun este supuesto: luego los triángulos son (8, 1) totalmente iguales: luego los ángulos RSN, RSM son rectos: y como (*por construc.*) OSM tambien sea recto, serán los ángulos RSM, OSM iguales, el todo á su parte, que es absurdo: luego ni el punto R ni otro, fuera de PQ, puede ser el centro: luego lo es el punto O.

COROLARIO.

Síguese, que qualquiera recta, que siendo perpendicular á la cuerda, la parte por medio, pasa por el centro.

PROP. II. Teorema.

Toda la cuerda cae dentro del círculo.

Esta proposicion consta claramente de la definicion de la línea recta y del círculo.

PROP. III. Teorema.

El diámetro que parte por medio qualquiera cuerda que no pasa por el centro, es perpendicular á ella; y si es perpendicular á ella, la parte por medio. (*fig.* 7.)

Explicacion. Digo que si el diámetro TY parte la cuerda XZ, que no pasa por el centro, por medio en S, es perpendicular á dicha cuerda; y si es perpendicular á ella, la parte por medio.

Preparacion Tírense VX, VZ.

Demonstracion. VX, VZ son iguales, por ser semidiámetros: luego el triángulo XVZ es Isóceles: luego (*cor.*2, 5, *l.* 1) si TY es perpendicular á XZ, la parte por medio, y al contrario.

PROP. IV. Teorema.

Si dos cuerdas se cortan fuera del centro, no se cortarán entrambas en partes iguales. (*fig.* 8.)

Explicacion. Las dos cuerdas AB, CD se cortan en F, fuera del centro. Digo que no se cortan de suerte, que cada una quede dividida en dos partes iguales.

Preparacion. Si una de ellas pasa por el centro, claro está que cortándola la otra por fuera del centro, no la cortará en partes iguales; pero si ninguna pasa por el centro, y dixere alguno se cortan en F en dos partes iguales, tírese la EF del centro E.

De-

Demonstracion. Porque la EF pasa por el centro, y divide la CD por medio en F, será (3) el ángulo EFD recto: asimismo, porque EF divide la AB por medio en F, será el ángulo EFB recto: luego los ángulos EFD, EFB son rectos, y por consiguiente iguales, el todo á su parte, que es imposible; luego no se pueden dividir por medio.

PROP. V. y VI. Teoremas.

Los círculos que se cortan ó se tocan interiormente, no tienen un mismo centro. (*fig.* 9. *y* 10)

Es claro; porque si A fuese centro de entrambos, las AC, AF, por ser semidiámetros iguales á AB, serian entre sí iguales, el todo á su parte, que es imposible.

PROP. VII. Teorema.

Si de un punto dentro del círculo que no séa el centro, como de D, se tiran líneas á la circunferencia DG, DI, DH, DK, DL. (*fig.* 11.)

I. *La mayor de todas será DG, que pasa por el centro E.*

Preparacion. Tírense del centro E las EI, EH, EK.

Demonstracion. Las rectas EG, EI son iguales, por ser semidiámetros: añádase á entrambas la ED, y será DEG igual á las dos DE, EI: estas dos (20, 1) son mayores que DI: luego DG es mayor que DI: de la misma suerte probaré ser mayor que otra qualquiera.

II. *La mas pequeña es DL, residuo de la DG.*

Demonstracion. En el triángulo EDI, los dos lados ED, DI juntos, son mayores que EI: (20, 1) luego son mayores que EL igual á EI: quítese pues á EDI y á EDL el segmento comun ED, y quedará DI mayor que DL: lo mismo se probará de qualquiera otra: luego DL es la mínima.

III. *La DH, que está mas cerca de la DG, es mayor que la DK mas apartada.*

Demonstracion. Los triángulos DHE, DKE tienen los lados EH, EK iguales, y el lado DE comun; pero el án-

ángulo DEH es mayor que DEK: luego (24, 1) la basa DH es mayor que DK; y así de los demas.

IV. *Del punto D solas dos líneas pueden salir iguales á la circunferencia.*

Consta de lo demonstrado; porque si algunas tres, como DI, DH, DK pudieren ser iguales, podria haber á una misma parte dos iguales, contra lo demonstrado.

PROP. VIII. Teorema.

Si de un punto L (fig. 12.) puesto fuera del círculo se tiran líneas á la circunferencia cóncava LI, LK, &c.

I. *La mayor de todas es LK, que pasa por el centro O.*

Preparacion. Tírense del centro las rectas OM, OP, OQ, &c.

Demonstracion. La OK es igual á OS: y añadiendo á entrambas la LO, será LOK igual á LOS: y como LOS (20, 1) sea mayor que LS, será LOK mayor que LS; y así de las demas.

II. *La LS que está mas cerca de LK, es mayor que qualquiera otra LR mas apartada.*

Demonstracion Los triángulos LOS, LOR tienen el lado LO comun, y OS igual á OR; pero el ángulo LOS es mayor que LOR: luego la basa LS es mayor que LR.

III. *De las líneas que vienen á la periferia convexâ, la LN, que alargada pasa por el centro, es la mínima.*

Demonstracion. Las dos LP, PO son (20, 1) mayores que LO: luego quitadas las ON, OP iguales, será LN menor que LP: y lo mismo se convencerá respecto de qualquiera otra.

IV. *La LP que está mas cerca de LN, es menor que LQ que está mas apartada.*

Demonstracion. Por estar el triángulo LPO dentro del triángulo LQO, y sobre su misma basa, los lados LP, PO son menores que LQ, QO: (21, 1) luego quitando las iguales OP, OQ, quedará LP menor que LQ.

V. *De dicho punto L solo pueden venir dos líneas iguales á la periferia convexâ; y lo mismo á la cóncava.*

Se infiere de lo demonstrado.

PROP.

PROP. IX. Teorema.

Si de un punto E (fig. 11.) puesto dentro del círculo, se pueden tirar á la circunferencia mas de dos líneas iguales, dicho punto será el centro.

Consta de la quarta parte de la *proposicion* 7.

PROP. X. Teorema.

Dos círculos no se cortan mas que en dos puntos. (*fig.* 13.)

Preparacion. Si alguno pretendiere cortarse los círculos en los tres puntos S, Q, R, del punto X, centro del círculo QTR, tírense las rectas XS, XQ, XR.

Demonstracion. Por ser XS, XQ, XR semidiámetros del círculo QTR, son iguales: luego del punto X salen tres líneas iguales á la circunferencia del otro círculo ZQRV: luego (9) X es tambien centro de dicho círculo: luego los círculos QTR, ZQV que se cortan, tienen un mismo centro contra la *proposicion* 5.

PROP. XI. Teorema.

En los círculos que se tocan interiormente, la recta que pasa por los centros, pasa por el contacto. (*fig.* 14.)

Explicacion. Los círculos IMH, INS se tocan interiormente en I. Digo que la línea HI, que pasa por los centros L, O, pasa por el contacto I.

Preparacion. De L, centro del círculo IMH, tírese la recta LM por qualquiera punto N del círculo INS.

Demonstracion. (6) El punto L es diferente del punto O: luego (7) la LI, que pasa por el centro O es mayor que LN; y por consiguiente LM igual á LI, es tambien mayor que LN: luego el punto N no es comun á entrambas circunferencias; luego no es el contacto. Lo mismo probaré de qualquiera otro punto que no sea I: luego solo I es el contacto, punto en que la HI corta las periferias.

PROP. XII. Teorema.

Si dos círculos se tocan exteriormente, la recta que pasa por los centros, pasa por el contacto. (*fig.* 15.)

Explicacion. Los círculos RMT, VNT se tocan en T. Digo

Digo que la línea RV, que pasa por los centros PQ, pasa por el contacto T.

Preparacion. Tírese qualquiera otra línea del centro P, que no pase por el centro Q, que corte la periferia VNT en X.

Demonstracion. Por estar el punto P fuera del círculo VNT, será (8) la línea PT menor que PX: luego tambien PS igual á PT, es menor que PX: luego X no es el contacto. Lo mismo probaré de qualquiera otro punto que no sea T: luego sólo el punto T, por quien pasa la recta tirada por los centros, es el contacto.

PROP. XIII. Teorema.

Los círculos solo se tocan en un punto.

Consta de lo dicho en las dos *proposiciones* 11 *y* 12.

PROP. XIV. Teorema.

Las cuerdas iguales distan igualmente del centro; y las que distan igualmente del centro, son iguales. (*fig.* 16.)

Explicacion. Las cuerdas BA, DE se suponen iguales. Digo lo primero, que distan igualmente del centro C.

Preparacion. Del centro C tírense las CG, CF perpendiculares á dichas cuerdas, y júntense CB, CD.

Demonstracion. Las perpendiculares CG, CF vienen del centro: luego (3) dividen las cuerdas AB, ED en dos partes iguales: luego siendo AB, ED iguales, sus mitades GB, FD tambien serán iguales. Esto supuesto, por ser el triángulo CGB rectángulo, el quadrado de CB será igual (47, 1) á los quadrados de BG, GC; y asimismo el quadrado de CD es igual á los quadrados de DF, FC: y como los quadrados de CB, CD, por ser de líneas iguales, sean iguales, los quadrados de BG, GC serán iguales á los quadrados de DF, FC: luego quitando de aquellos el quadrado de BG, y de estos el quadrado de DF, que tambien son iguales por ser de líneas iguales, quedará el quadrado de GC igual al quadrado de FC: luego las líneas ó distancias CG, CF son iguales.

Digo lo segundo, que si las líneas ó distancias CG, CF son iguales, tambien las cuerdas AB, ED son iguales.

De-

Demonstracion. Por lo demonstrado en la primera parte, los quadrados de CG, GB son iguales á los quadrados de CF, FD: luego quitando de aquellos el quadrado de CG, y de estos el quadrado de CF, quedarán los quadrados de GB, FD iguales; y por consiguiente las rectas GB, FD, como tambien las dobladas de ellas, que son las cuerdas AB, ED, serán iguales.

PROP. XV. Teorema.

De las cuerdas del círculo, la mayor de todas es el diámetro; de las demas, aquella es mayor, que está mas cerca del centro. (*fig.* 17.)

Explicacion. Digo lo primero, que el diámetro HK es mayor que qualquiera otra cuerda LM.

Preparacion. Tírense las rectas IL, IM.

Demonstracion. IL es igual á IH por ser semidiámetros; y asimismo IM es igual á IK: luego LIM es igual á HK. Las LIM son (20, 1) mayores que LM: luego HK es mayor que LM.

Digo lo segundo, que LM, que está mas cerca del centro I, es mayor que NO mas apartada. Tírense las IN, IO.

Demonstracion. NI es igual á LI, como tambien OI á MI, y el ángulo LIM es mayor que el ángulo NIO: luego (24, 1) la basa LM es mayor que NO.

PROP. XVI. Teorema.

La perpendicular á la extremidad del diámetro cae toda fuera del círculo y es tangente; y entre ella y el círculo no se puede tirar otra recta del punto del contacto, sin que corte al círculo. (*fig.* 18.)

Explicacion. Sea el diámetro PQ á cuya extremidad P sea perpendicular TP. Digo lo primero, que toda la TP cae fuera del círculo, y es tangente.

Preparacion. Tírese del centro O la recta OT.

Demonstracion. En el triángulo TPO, el ángulo TPO es recto: luego el ángulo T es agudo: luego el lado OT opuesto al mayor ángulo, (19, 1) es mayor que el lado OP; y siendo OP semidiámetro, sera OT mayor que semidiámetro: luego el punto T cae fuera del círculo: Lo mis-

mismo se convencerá de qualquiera otro punto de la línea PT: luego toda cae fuera el círculo; y solo el punto P es comun á la línea y al círculo, y así es tangente.

Digo lo segundo, que la línea PS y qualquiera otra que se tire del punto P entre la PT y el círculo, necesariamente corta al círculo.

Preparacion. Tírese del centro O la perpendicular OR á la recta PS, y quedará formado el triángulo ORP.

Demonstracion. En el triángulo ORP, el ángulo R es recto, y OPR agudo: luego el lado OP opuesto al ángulo recto R, será mayor que el lado OR opuesto al ángulo OPR agudo: siendo pues OP semidiámetro, será OR menor que semidiámetro: luego la PS le corta, y por consiguiente corta el círculo.

COROLARIOS.

1 El contacto de la tangente con el círculo, es un solo punto: y aunque la recta PQ se alargue hácia Q infinitamente, y en ella se tomen infinitos puntos mas y mas distantes, de que como centros se describan mayores y mayores círculos por el punto P, todos tocarán la línea PT en solo el punto P, lo que es evidente; pero en realidad admirable.

2 El ángulo de la contingencia, que es el mixtilínco TPV, no puede ser dividido con línea recta; pero las sobredichas circunferencias de círculos mayores y mayores le pueden dividir en ángulos menores y menores infinitamente: y en estos corolarios se encierra todo el misterio de la línea *asíntotos*, á quien siempre infinitamente se va acercando la parábola, sin que jamas pueda concurrir, como se verá en su lugar.

ESCOLIO.

De esta proposicion infieren algunos, que el ángulo de la contingencia TPV es menor que qualquiera ángulo rectilíneo; y el ángulo del semicírculo OPV, mayor que qualquiera ángulo rectilíneo agudo; porque como se ha demonstrado, qualquiera recta PS cae dentro del círculo: luego la periferia PV siem-

siempre estará entre PS y PT: luego el ángulo de la contingencia TPV siempre será menor que qualquiera rectilíneo TPR, y el ángulo OPV del semicírculo siempre será mayor que qualquiera ángulo rectilíneo agudo OPS, por estar siempre la curva PV sobre la recta PS.

De esto se infiere, que siendo el ángulo OPV del semicírculo mayor que qualquiera rectilíneo agudo, y menor que el recto TPO, no hay en los infinitos ángulos agudos rectilíneos, alguno que sea igual al ángulo del semicírculo: con que se puede pasar por todos los medios posibles que hay entre una cosa menor y otra mayor, sin que en ellas haya alguna igual á otra, que realmente está entre la mayor y la menor.

Pero como advierte el P. Tacquet, todos estos corolarios no son mas que unos paradojas, nacidos de la mala inteligencia de la naturaleza del ángulo que se supone ser quantidad, lo que es falso; porque no es otra cosa el ángulo, que la inclinacion de dos líneas que salen de un punto, la qual parece constante no ser quantidad, sí modo de la quantidad: pues aunque dichas líneas se alarguen ó se acorten, siempre queda el mismo ángulo; y por consiguiente mas pertenece el ángulo al predicamento que los Filosófos llaman situacion, que á otro alguno.

Y aunque es verdad que los Geómetras atribuyen al ángulo las propiedades de la quantidad, como es ser uno igual, mayor ó menor que otro, poderse dividir en partes iguales ó desiguales, &c. pero esto no se ha de entender con todo rigor y propiedad; pues solo son iguales, mayores ó menores unos que otros, en quanto sus medidas, que son los arcos de círculo, incluyen los mismos ó mas ó ménos grados: y en tanto se dividen en dos ó mas partes, en quanto dichos arcos se dividen. Esto supuesto, como el ángulo de la contingencia, y tambien el del semicírculo, no tengan arco alguno que les pueda medir, pues quantos arcos se describieren del punto P del contacto, todos serán desemejantes y de mayor número de grados, se sigue no poderse comparar dichos ángulos con los rectilíneos; y así no poderse llamar propiamente mayores, menores ó iguales entre sí: con que cesan los paradojas referidos.

PROP.

PROP. XVII. Problema.

Se resuelve con mayor facilidad por la *prop.* 31: véase en su corolario.

PROP. XVIII. Teorema.

Si del centro del círculo (fig. 18.) se tira una recta OP al punto del contacto, dicha recta será perpendicular á la tangente.

PROP. XIX. Teorema.

Si á la tangente de un círculo se levanta una perpendicular del punto del contacto, pasará por el centro.

Esta proposicion y la antecedente constan de la 16, por lo qual omito sus demonstraciones.

PROP. XX. Teorema.

El ángulo formado en el centro, es doblado del que se forma en la circunferencia, si ambos insisten en un mismo arco. (fig. 19.)

Explicacion. Los ángulos BCE, BAE insisten en el mismo arco BE. Digo que el ángulo BCE formado en el centro C, es doblado del ángulo BAE formado en la periferia. En este caso primero coinciden los lados EA, EC.

Demonstracion. El ángulo BCE es externo respecto del triángulo ABC: luego (32, 1) es igual á los dos ángulos ABC, BAC: y siendo estos iguales (5, 1) por ser iguales los lados CA, CB, será el ángulo BCE doblado del ángulo BAE.

Caso segundo, en que ningun lado coincide con otro. Digo que el ángulo BCD es doblado del ángulo BAD.

Demonstracion. Queda demonstrado, que el ángulo BCE es doblado del ángulo BAE: de la misma suerte se convence ser el ángulo DCE doblado del ángulo DAE: luego todo BCD es doblado de todo BAE.

Caso tercero, en que los lados se cortan. (*fig.* 21.) Digo que el ángulo HCI es doblado del ángulo HFI. Tírese el diámetro FCG.

Demonstracion. Como queda demonstrado en el primer caso, el ángulo HCG es doblado del ángulo HFG; y asimis-

mo

mo el ángulo ICG es doblado del ángulo IFG: quítese pues el ángulo ICG del total HCG, y el ángulo IFG del total HFG, y quedará el ángulo HCI doblado del ángulo HFI.

COROLARIO.

El valor y medida del ángulo formado en la circunferencia, es la mitad del arco sobre que insiste; esto es, (*fig*. 19.) el valor del ángulo BAE es la mitad del arco BE; porque dicho ángulo BAE es la mitad del ángulo BCE: luego su medida será la mitad del arco BE, que es medida del ángulo BCE.

Lo mismo es quando el ángulo ADC (*fig*. 20.) formado en la circunferencia, insiste en el arco AEC mayor que el semicírculo. Tírese por el centro B la recta DBE, y júntense BA, BC: y por la razon sobredicha, la medida del ángulo ADE es la mitad del arco AE; y asimismo la medida del ángulo EDC es la mitad del arco EC: luego la medida de todo el ángulo ADC es la mitad del arco AEC.

PROP. XXI. Teorema.

Los ángulos que están en un mismo segmento, ó que insisten sobre un mismo arco, son iguales. (*fig*. 22.)

Explicacion. Los ángulos MKN, MLN están en el mismo segmento MKLN; y por consiguiente insisten en el mismo arco MN: digo que son iguales.

Preparacion. Tírense al centro O las rectas MO, NO.

Demonstracion. Tanto el ángulo K, como el ángulo L, son la mitad del ángulo MON hecho en el centro: (20) luego son iguales.

PROP. XXII. Teorema.

Los quadriláteros inscritos en el círculo, tienen sus ángulos opuestos iguales á dos rectos. (*fig*. 23.)

Explicacion. El quadrilátero PQRS está inscrito en el círculo. Digo que los ángulos opuestos Q, S juntos son tanto como dos rectos.

Demonstracion. El valor del ángulo PQR es la mitad del arco PSR en que insiste: (*corol. de la prop.* 20) asimismo el valor del ángulo PSR es la mitad del arco PQR en que insiste; y como los dos arcos PSR, PQR hagan

un

un círculo, será el valor de dichos ángulos la mitad de un círculo, que es dos rectos.

PROP. XXIII. y XXIV.

Se omiten por no ser menester.

PROP. XXV. Problema.

Acabar un círculo, dada una porcion de él. (*fig.* 24.)

Explicacion. Dado el arco TVX, se pide se perficione todo el círculo.

Operacion. Tírense qualesquiera dos cuerdas TV, VX: divídanse por medio en S y R con las perpendiculares SZ, RZ. (10, 1) Digo que el punto Z en que concurren, es el centro, de que con el intervalo ZV se perficionará el círculo.

Demonstracion. (*corol. de la prop.* 1) El centro está en SZ y en RZ: luego es el punto Z.

PROP. XXVI. y XXVII.

En los círculos iguales, las cuerdas iguales lo son de arcos iguales; y si los arcos son iguales, tambien sus cuerdas. (*fig.* 25.)

Explicacion. Primero. En los círculos iguales QS, LO, las cuerdas CE, FI se suponen iguales. Digo que tambien los arcos CSE, FOI son iguales, como tambien CQE, FLI.

Preparacion. De los centros A, B tírense las rectas AC, AE, BF, BI.

Demonstracion. Por ser los círculos iguales, los triángulos ACE, BFI tienen los lados AC, AE iguales á BF, BI: y siendo por suposicion CE, FI iguales, serán dichos triángulos (8, 1) del todo iguales: luego si un círculo se ajusta sobre el otro, el triángulo BFI se podrá ajustar sobre ACE, y el centro B sobre A, y el punto F sobre C; el I sobre E, y el arco FOI se ajustará sobre CSE, como FLI sobre CQE: luego dichos arcos son iguales.

Digo lo segundo: Si en los mismos círculos los arcos FLI, CQE se suponen iguales, tambien las rectas CE, FI serán iguales; porque hecha la superposicion, el punto F vendrá sobre C, y el I sobre E: luego toda FI sobre CE.

PROP.

PROP. XXVIII. y XXIX. Teoremas.

En círculos iguales los ángulos iguales formados en el centro ó en la circunferencia, insisten sobre arcos iguales; y si los arcos en que insisten son iguales, los ángulos son tambien iguales. (fig. 25.)

Explicacion. Primero. En los círculos iguales QS, LO se suponen iguales los ángulos A y B hechos en el centro. Digo que los arcos CSE, FOI sobre que insisten, son iguales.

Demonstracion. Los triángulos CAE, FBI tienen los lados CA, AE iguales á los lados FB, BI, por ser semidiámetros de círculos iguales; y siendo los ángulos A y B iguales, serán (4, 1) las basas CE, FI iguales: luego (26) los arcos CSE, FOI son iguales.

Segundo. Digo que si los ángulos Q y L hechos en la circunferencia, son iguales, tambien lo son los arcos CSE, FOI; porque siendo dichos ángulos iguales, tambien lo son los ángulos A y B hechos en el centro, que (20) son doblados de ellos: luego, como he demonstrado, los arcos CSE, FOI son iguales.

Tercero. Digo que si los arcos CSE, FOI son iguales, tambien lo son los ángulos A y B hechos en el centro, y los Q y L hechos en la circunferencia.

Demonstracion. Si los arcos CSE, FOI son iguales, tambien (27) las cuerdas CE, FI son iguales; y siendo AC, AE iguales á BF, BI, por ser semidiámetros de círculos iguales, serán (8, 1) los triángulos CAE, FBI del todo iguales: luego los ángulos A y B son iguales; y tambien Q y L que (20) son sus mitades.

PROP. XXX. Problema.

Dividir un arco MNO en dos partes iguales. (fig. 26.)

Operacion. Tírese la cuerda MO, y divídase esta por medio en P, tirando la perpendicular NP, (10 y 11, 1) y quedará dividido el arco por medio en N.

Preparacion. Tírense las MN, NO.

Demonstracion. En los triángulos MNP, ONP, son MP, PO

PO iguales por construccion, y NP comun, y los ángulos en P rectos é iguales: luego (4, 1) las MN, NO son iguales: luego (26) los arcos MN, NO tambien son iguales.

PROP. XXXI. Teorema.

El ángulo que está en el semicírculo, es recto; el que en segmento mayor que semicírculo, es agudo, y el que en segmento menor, obtuso. (*fig.* 27.)

Explicacion. El ángulo QPR está en el semicírculo. Digo que es recto.

Demonstracion. El valor del ángulo QPR es la mitad del semicírculo QTR sobre que insiste: (*corol. de la propos.* 20) luego su valor es 90 grados: luego es recto.

Digo lo segundo. Que el ángulo PQR que está en el segmento PQTR mayor que el semicírculo, es agudo; porque su valor es la mitad de la periferia PSR sobre que insiste; esta es menor que un semicírculo: luego el valor de dicho ángulo es menor que la mitad del semicírculo, ó menor que 90 grados: luego es agudo.

Digo lo tercero. Que el ángulo PSR que exíste en el segmento PSR menor que un semicírculo, es obtuso; porque su valor es la mitad de la periferia PQTR sobre que insiste; y siendo esta mayor que el semicírculo, será el valor de dicho ángulo mas que la mitad del semicírculo; esto es, mas de 90 grados: luego es obtuso. Este Teorema halló Táles Milesio.

COROLARIO.

De aquí se colige el modo de resolver el Problema que trae Euclídes en la *prop.* 17 de este libro. (*fig.* 28.)

Pídese, que de un punto X dado fuera del círculo, se tire una tangente.

Operacion. Tírese del punto dado X al centro V la recta XV: divídase por medio en Y; y con la distancia YV hágase el semicírculo VZX, que cortará la periferia en Z: tírese la XZ, y será la tangente. La razon es, porque el ángulo Z está en el semicírculo VZX: luego es recto, y la ZX tangente. (16)

PROP.

PROP. XXXII. Teorema.

Si una recta fuere tangente á un círculo, y del contacto se tira otra que le corte, los ángulos que esta hiciere con la tangente serán iguales á los que se forman en los segmentos alternos. (*fig.* 29.)

Explicacion. La recta CA toca al círculo en B; y del punto B sale la BD, que corta al círculo. Digo que el ángulo ABD formado de la secante BD con la tangente BA, es igual al ángulo BED hecho en el segmento alterno BGED; y el ángulo CBD tambien igual al ángulo BFD hecho en el segmento alterno BFD.

Demonstracion. I. Si la línea que sale del contacto pasare por el centro, formaria (18) con la tangente ángulos rectos; y los ángulos hechos en los segmentos alternos, que en este caso serian semicírculos, tambien serian rectos. (31)

II. Si la línea que sale del contacto B, no pasa por el centro, como la BD, pruebo que el ángulo ABD es igual al ángulo E, y para mayor claridad supongo, que BE pasa por el centro. Esto supuesto, por ser BE perpendicular á CA, los ángulos ABE, CBE son dos rectos; y siendo los tres ángulos del triángulo BDE iguales á dos rectos, (32, 1) serán dichos tres ángulos iguales á los dos ABE, CBE: quítese pues de estos dos el ángulo CBE recto, y de aquellos tres el ángulo BDE tambien recto, por estar en el semicírculo, (31) y quedarán el ángulo E y el ángulo EBD iguales al recto ABE: quítese de entrambas partes el ángulo EBD que es comun, y quedará el ángulo ABD igual al ángulo E.

III. Pruebo que el ángulo CBD es igual al ángulo BFD: los ángulos CBD, ABD (13, 1) son iguales á dos rectos; y en el quadrilátero BEDF, los ángulos opuestos E y F (22) tambien son iguales á dos rectos: quítese pues de los primeros el ángulo ABD, y de los segundos el ángulo E igual (*por lo demonstrado*) al ángulo ABD, y quedarán de aquellos el ángulo CBD, y de estos el ángulo F iguales.

PROP. XXXIII. Problema.

Describir sobre una recta dada un segmento de círculo, capaz de un ángulo igual á otro ángulo dado. (*fig.* 30.)

Explicacion. Sea dada la recta BC, y el ángulo agudo ABC: pídese se describa sobre ella un segmento de círculo, que sea capaz de un ángulo igual al dado ABC.

Operacion. Del punto B tírese la BL perpendicular á AB; en el término C de la recta dada BC hágase el ángulo BCI (23, 1) igual al ángulo CBL; y la CI que le forma cortará la BL en I, y quedará formado el triángulo BCI Isóceles, por tener los ángulos B y C iguales: (6, 1) haciendo pues centro en I, se describirá por B y C un círculo, cuyo segmento BQC será capaz de un ángulo igual al ángulo dado ABC.

Demonstracion. Por ser AB perpendicular al diámetro BL es tangente, (18) y la BC es secante: luego (32) el ángulo que se hiciere en el segmento alterno BQC, será igual al dado ABC.

Si el ángulo dado fuese el obtuso RBC, se haria la misma operacion, y el segmento COB será capaz de dicho ángulo.

PROP. XXXIV. Problema.

Dado un círculo, cortar de él un segmento capaz de un ángulo igual á otro ángulo dado. (*fig.* 31.)

Explicacion. Pídese, que del círculo ACFQ se corte un segmento capaz del ángulo H.

Operacion. Tírese la BL perpendicular á la extremidad del diámetro AF, y será (16) tangente: fórmese en A el ángulo BAC igual al ángulo H, y (*por la* 32) será el segmento AQC capaz de un ángulo igual al ángulo BAG, esto es, igual al ángulo H.

PROP. XXXV. XXXVI. y XXXVII.

Estas tres últimas proposiciones de este libro, se demuestran con gran facilidad por las *proposiciones* 16 *y* 17 del *libro* 6, y como solo sirvan para la *proposicion* 10 del *libro* 4, que transfiero de este lugar á la Geometría

tría práctica, dexo sus demonstraciones para el *Apéndice* del *libro* 6.

LIBRO IV.

Es todo práctico, y tiene su propio lugar en el tratado de la Geometría práctica.

LIBRO V.

EN este libro trata Euclídes generalmente de las proporciones en quanto convienen á toda especie de quantidad: es de singular utilidad para todas las Matemáticas. Su Autor, segun Vitruvio, es Eudoxîo Gnidio compañero de Platon en su viage á Egipto. Todos los Teoremas de este libro son puros axîomas, que solo necesitan de explicacion; pero esto no obstante, demonstraré los que pareciere tienen alguna dificultad, omitiendo la demonstracion de otros, que por tan claros no son capaces de que la demonstracion les añada mayor evidencia. El método de las demonstraciones será el del P. Tacquet y otros modernos, que es mas fácil é inteligible para los principiantes.

DEFINICIONES.

1 *Parte es una quantidad menor, comparada con otra mayor. Todo es una quantidad mayor, comparada con otra menor*, como 2 es parte de 4, y el 4 es todo respecto del 2.

2 La parte se divide en *aliquota* y *aliquanta*. Parte *aliquota*, á quien Euclídes llama absolutamente *parte*, es la que tomada algunas veces, compone ó mide perfecta-

tamente al todo. Como el 3 es parte aliquota de 6; porque tomado ó repetido dos veces, hace perfectamente 6. Parte *aliquanta*, á quien Euclídes llama *partes*, es la que tomada algunas veces, no adeqüa jamas al todo. Como 4 es parte aliquanta de 9; porque tomado dos veces hace 8, que es ménos que 9; y tomado tres veces hace 12, que es mas que 9.

3 *Un todo, respecto de la parte aliquota que le mide, se llama multíplice.* Como el 8 es multíplice del 4; porque dos veces 4 hacen 8. Y porque el 8 es tan multíplice del 4, como el 6 del tres; esto es, tantas veces el 8 encierra al 4, como el 6 al 3, se llaman el 8 y el 6 *equimultíplices* del 4 y del 3, y consiguientemente, porque el 4 se incluye en el 8 tantas veces como el 3 en el 6, se dicen ser el 4 y el 3 partes aliquotas semejantes del 8 y del 6.

4 *Razon es la habitud, relacion ó respecto de una quantidad á otra del mismo género.* Como si se compara número con número, línea con línea, superficie con superficie, &c. Esta definicion explica mas Euclídes en la 5, diciendo, *que solas aquellas quantidades tienen razon entre sí, que qualquiera de ellas multiplicada puede exceder la otra.* De que se colige, que el lado del quadrado tiene razon con la diagonal; porque si se duplica, la excede. Colígese tambien, que ni la línea con la superficie, ni esta con el sólido tienen razon alguna; porque aunque la línea se multiplique quanto se quiera, jamas excederá ni hará superficie, ni esta un sólido. Como la razon sea relacion ó respecto de una cantidad á otra, necesariamente ha de incluir dos términos, de los quales el uno se compara al otro: el que se compara al otro, se llama *antecedente*; y aquel á quien se compara, se dice *conseqüente*: como en la razon de 4 á 2, el 4 es el antecedente; porque se compara con el 2, diciendo ser doblado del 2, y este es el conseqüente.

5 La razon se divide primero en racional é irracional. *Razon racional*, es la que se puede explicar con números, como la que hay de una línea de 4 palmos á otra de 2 palmos, que la explicamos con números, diciendo tener ra-

zon dupla, ó que la de 4 es doblada de la de 2, ó que se han como 4 á 2. *Razon irracional*, es la que no se puede declarar con números, como la que hay entre la diagonal del quadrado con el lado del mismo quadrado; porque no hay números que la puedan explicar.

6 Divídese tambien la razon en *razon de igualdad y de desigualdad*. La primera, es la que se halla entre dos quantidades iguales, como 4 con 4. La segunda; entre desiguales, como 4 con 2. Quando en la razon de desigualdad el antecedente es mayor que el conseqüente, se llama *razon de mayor desigualdad*, como la que hay de 4 con 2. Pero si el antecedente es menor que el conseqüente, se llama *razon de menor desigualdad*, como la que hay de 2 con 4. Las razones de desigualdad tienen diferentes nombres, cuya explicacion omito, por ser de poca importancia, y porque con solo el uso se aprenden.

7 *Razones semejantes ó iguales*, si son de mayor desigualdad, son aquellas *en que el antecedente de la una contiene de la misma manera á su conseqüente, que el antecedente de la otra á su conseqüente*; y si son de menor desigualdad, son razones iguales ó semejantes, *si el antecedente de la una se contiene en su conseqüente, de la misma manera que el antecedente de la otra se contiene en el suyo*. Contener el antecedente de la una á su conseqüente, de la misma manera que el antecedente de la otra razon incluye al suyo, consiste en que el antecedente de la una razon tantas veces incluya á su conseqüente ó qualquiera parte aliquota suya, quantas el antecedente de la otra incluye á su conseqüente ó semejante parte aliquota suya: como la razon de 8 á 4 es la misma, igual ó semejante á la razon de 10 á 5; porque así como el 8 incluye dos veces el 4, así 10 incluye dos veces al 5. Tambien la razon de 6 á 4 es la misma que de 12 á 8; porque así como el 6 incluye al 4 una vez y media, así el 12 contiene al 8 una vez y media.

De la misma suerte en las razones de menor desigualdad, como son 4 á 8 y 6 á 12, contenerse el 4 de la misma manera en el 8 que el 6 en el 12, consiste en que así como el 4 se contiene dos veces en el 8, así el 6 se inclu-

ye

ye dos veces en el 12, ó tambien, que así como el 4 incluye dos quartas del 8, así el 6 incluye dos quartas del 12.

8 De aquí se colige, que entónces dos razones son *diferentes, desiguales ó desemejantes*, quando el antecedente de la una incluye mas veces á su conseqüente, que el antecedente de la otra incluye á su conseqüente: ó quando el antecedente de la una incluye mas veces alguna parte aliquota de su conseqüente, que el antecedente de la otra contiene semejante parte aliquota del suyo.

9 *Aquella razon se dirá generalmente mayor que otra, cuyo antecedente incluye mas veces alguna parte aliquota de su conseqüente, que el antecedente de la otra incluye semejante parte aliquota del suyo.* Como la razon de 101 á 10 es mayor que la de 200 á 20; porque 101 incluye la décima parte del 10, que es la unidad ciento y una veces: y el 200 incluye la décima parte del 20, que es dos solo cien veces. Tambien la razon de 3 á 4 es mayor que la de 4 á 8; porque el 3 incluye tres veces la quarta parte de 4, y 4 incluye solas dos veces la quarta parte de 8.

Esta explicacion de las razones semejantes y desemejantes, sobre ser muy clara é inteligible, se funda en la misma naturaleza de las razones, que no son otro que un respeto ó comparacion de una quantidad con otra; las quales no de otra suerte se comparan, que en quanto se dicen unas ser iguales, mayores ó menores que otras, lo que no puede mejor explicarse, que diciendo incluir ó incluirse mas ó ménos veces las unas en las otras; ó que incluya la una mas ó ménos partes aliquotas de la otra: luego ser las razones semejantes consiste, en que estas inclusiones sean iguales; y el ser desemejantes, en que dichas inclusiones sean desiguales.

Conviene tambien esta explicacion á las razones irracionales; porque si bien en estas los antecedentes y conseqüentes no tienen parte aliquota comun, por ser inconmensurables; pero tantas veces como cabe qualquiera parte aliquota de un conseqüente en su antecedente, tantas se incluye semejante parte aliquota del otro conseqüente en su antecedente, aunque siempre en entrambos sobrará algo hasta el infinito; y esto basta para que dichas razones ir-

irracionales sean semejantes, como trae el P. Tacquet y el P. Miliet en el principio de este libro.

10 *Proporcion, es la semejanza ó igualdad de dos razones*: llámase en Griego *analogía*; y así, por ser la razon de 4 á 2 semejante ó igual á la razon de 6 á 3, hacemos de las dos una proporcion, quando las comparamos, diciendo: Como se ha 4 con 2, así se ha 6 con 3.

De esto se sigue, que por tener una razon dos términos, antecedente y conseqüente, la proporcion, que como he dicho incluye dos razones, tendrá por lo regular quatro términos, dos antecedentes y dos conseqüentes, como se vé en el exemplo propuesto; pero porque suele muchas veces el mismo término, que es conseqüente de la primera razon, servir de antecedente para la segunda, se halla muchas veces la proporcion en solos tres términos, como quando decimos: como se ha 8 con 4, así 4 con 2. Los términos que componen la proporcion, se llaman *proporcionales*.

11 Divídese la proporcion en *continua* y *no continua*. *Continua*, es quando el término primero al segundo tiene la misma razon, que el segundo al tercero, y que el tercero al qüarto, y el quarto al quinto, &c. y se llaman los términos tres, quatro ó cinco *continuas proporcionales*, conforme el número de los términos, como los siguientes 16, 8, 4, 2, 1: como 16 á 8, así 8 á 4, y 4 á 2, y 2 á 1. *Proporcion no continua*, es quando se interrumpe, como en estos 12, 6, 8, 4: como 12 con 6, así 8 con 4; pero no vale decir, como 12 con 6, así 6 con 8. Los términos de esta se llaman proporcionales, pero no continuos.

12 *Términos homólogos, son los antecedentes con los antecedentes, y los conseqüentes con los conseqüentes*: como siendo 12 con 6, como 8 con 4, el 12 y el 8 son homólogos; como tambien el 6 y el 4.

13 *Razon compuesta, es la que se compone de otras qualesquiera razones*. Si hubiere pues muchas cantidades de una especie, la primera á la última se dice tener la razon compuesta de las razones que tienen entre sí las cantidades intermedias, como en este exemplo: 3, 5, 8, 9. La razon de 3 á 9 es compuesta de las tres razones intermedias,

que

que son la de 3 á 5, la de 5 á 8, y la de 8 á 9, sean las que fueren. Y para que se vea con mayor claridad, hágase la composicion, poniéndolas primero como quebrados, y multiplicando continuamente los numeradores, y tambien los denominadores, como aquí se vé: y será la multiplicacion ó composicion de todas ellas este producto, $\frac{120}{360}$ que es la misma razon que hay de 3 á 9.

$$\frac{3}{5}\quad\frac{5}{8}\quad\frac{8}{9}\quad\Big|\quad\frac{120}{360}$$

14 *Razon duplicada*, es la que resulta de la composicion de dos razones semejantes ó iguales. *Razon triplicada*, la que resulta de la composicion de tres semejantes. *Quadruplicada*, la que de quatro, &c. De que se sigue, que si hay algunas quantidades continuas proporcionales, como las siguientes; *Primera. Segunda. Tercera. Quarta. Quinta.*

16.	8.	4.	2.	1.

La primera á la tercera tiene razon duplicada de la que hay entre la primera y la segunda; porque se compone de la razon de la primera á la segunda, y de la segunda á la tercera; y por ser estas semejantes, se dice tener la primera á la tercera, razon duplicada de la que hay entre la primera y segunda, ó entre la segunda y tercera. Asimismo, la primera á la quarta tiene razon triplicada de la que hay entre la primera y segunda, por componerse de tres razones semejantes á la que hay entre la primera y segunda: y por la misma razon, la primera á la quinta tiene razon quadruplicada, &c.

15 *Razon subduplicada*, es la que entra dos veces en la composicion de otra: como la que hay entre la quantidad primera y segunda, es subduplicada de la que hay de la misma primera á la tercera. Y esa misma razon de la primera á la segunda, *es subtriplicada* de la que hay entre la primera y la quarta, &c.

16 Los términos proporcionales se pueden comparar de siete maneras; es á saber: *Directamente*, *alternando*, *invirtiendo*, *componiendo*, *dividiendo*, *convirtiendo*, y *por igualdad*. Los seis primeros explicaré en los quatro términos proporcionales siguientes.

Ra-

Razon primera.		Razon segunda.	
Antecedente 1.	*Conseqüente* 1.	*Antecedente* 2.	*Conseqüente* 2.
Término 1.	*Término* 2.	*Término* 3.	*Término* 4.
B 4	C 2	D 6	E 3

Comparar *directamente*, es comparar el antecedente 1 al conseqüente 1, y el 2 al 2: como B con C, así D con E.

Comparar *alternando*, es quando se toman los términos alternativamente; de suerte, que se compara el un antecedente al otro antecedente, y el un conseqüente al otro: como B con D, así C con E.

Comparar *invirtiendo*, es comparar cada conseqüente á su antecedente; de suerte, que lo que era conseqüente, se hace antecedente; y lo que era antecedente, conseqüente: como C con B, así E con D.

Comparar *componiendo*, consiste en comparar la suma ó agregado del antecedente y conseqüente al mismo conseqüente: explícase la suma con esta señal † que quiere decir *mas*: y decimos componiendo: como B † C con C, así D † E con E; esto es, B y C juntos se han con C, como D y E juntos con E.

Comparar *dividiendo*, es comparar la diferencia del antecedente y conseqüente al mismo conseqüente: explícase esta diferencia con el señal — que quiere decir *ménos*: y decimos dividiendo: como B — C con C, así D — E con E; esto es, como B ménos C con C, así D ménos E con E.

Comparar *convirtiendo*, consiste en comparar el antecedente con la diferencia que hay entre el antecedente mismo y su conseqüente: como si decimos directamente, como B con C, así D con E, será convirtiendo B con B — C, como D con D — E.

La *comparacion por igualdad* sucede, quando habiendo en cada una de las dos partes de la proporcion mas de dos términos; pero tantos en la una como en la otra: y comparándoles de dos en dos tienen una misma razon, se comparan últimamente el primero y último de la una parte con el primero y último de la otra, omitiendo en entrambas los términos intermedios: hácese claro con este exemplo,

16. 8. 4. 12. 6. 3.

Por ser 16 con 8, como 12 con 6, y 8 con 4, como 6 con

con 3, se infiere por igualdad: luego 16 con 4, es como 12 con 3.

Esta comparacion por igualdad, es en dos maneras. La primera, *por igualdad ordenada*; y es quando las quantidades se van comparando por su órden: las dos primeras de la una parte con las dos primeras de la otra; y las dos segundas de aquellas con las dos segundas de esta, como se ha visto en el exemplo propuesto.

La segunda es, *por igualdad desordenada ó perturbada*; y es quando se perturba el dicho órden en la comparacion: como si decimos, como 16 con 8, así 6 con 3, y como 8 con 4, así 12 con 6: será por igualdad desordenada, como 16 con 4, así 12 con 3.

Explicaré los Teoremas de este libro en números, por hacerse en ellos mas fáciles y evidentes sus verdades; pero lo que de ellos se dixere, se debe entender de todo género de quantidad. Las primeras seis proposiciones se omiten ya comunmente por supérfluas.

PROP. VII. Teorema.

X 8. C 4.
Z 8.

Las quantidades iguales X, Z, tienen una misma razon con la quantidad C; y C tiene con X la misma razon, que con Z.

Es axîoma, y no necesita de demonstracion.

PROP. VIII. Teorema.

Si las quantidades X, Z son desiguales, la mayor X tiene mayor razon con una tercera quantidad C, que la menor Z tiene con la misma C; y la tercera quantidad C tiene menor razon con la mayor X, que con la menor Z.

X 8. C 2.
Z 4.

Consta de la *definicion* 9 de este libro; y tambien porque X es quadrupla de C, y la Z es solo dupla: luego aquella razon es mayor que esta. Tambien C incluye una sola quarta parte de X, y dos quartas partes de Z: luego mayor razon hay de C á Z, que de C á X.

PROP.

PROP. IX. Teorema.

Si las quantidades X y Z tienen una misma razon con una tercera quantidad C, se infiere ser iguales X y Z entre sí; y si una misma quantidad C tiene la misma razon con X y con Z, tambien se infiere ser estas iguales entre sí.

Z 8. C 4.
X 8.

PROP. X. Teorema.

Si la quantidad X tiene mayor razon con una quantidad C, que tiene Z con la misma C, se infiere ser X mayor que Z; y si la quantidad C tiene mayor razon con Z que con X, se infiere ser Z menor que X.

X 8. C 2.
Z 4.

Consta de la *definicion* 9.

PROP. XI. Teorema.

Las razones que son iguales á otra razon, son iguales entre sí.

A 10. B 5 F 8. G 4.
M 2. N 1.

Explicacion. A á B tiene la misma razon dupla, que M á N. Tambien F á G tiene la misma razon dupla, que M á N. Digo que las razones de A á B y de F á G son iguales ó las mismas; esto es, entrambas son duplas.

PROP. XII. Teorema.

Si algunas quantidades fueren proporcionales, la misma razon tendrá un antecedente á su conseqüente, que todos los antecedentes juntos á todos los conseqüentes.

Explicacion. El antecedente G tiene razon tripla con su conseqüente L: y asimismo el antecedente H es triplo de su conseqüente K. Digo ser evidente, que M suma de los antecedentes, es triplo de N suma de los conseqüentes.

G 6.	L 2.
H 9.	K 3.
M 15.	N 5.

PROP. XIII. y XIV.

Se omiten por no ser menester.

PROP.

PROP. XV. Teorema.

Los equimultíplices tienen entre sí la misma razon que las quantidades de quienes son equimultíplices.

G	2.	3.	L
F	2.	3.	K
E	2.	3.	H
C	6.	9.	D
A	2.	3.	B

Explicacion. Las quantidades C y D son equimultíplices de A y B. Digo que la misma razon hay de C á D, que de A á B.

Preparacion. Supuesto que C incluye algunas veces justamente la quantidad A, divídase C en las partes E, F, G iguales á A. Divídase asimismo D en las H, K, L iguales á B, que serán tantas como las divisiones que se hicieron de A, por tener en sí D á B tantas veces como C incluye á A.

Demonstracion. Por ser E igual á A, y H igual á B, serán E á H, como A á B; y por la misma razon serán F á K y G á L, como A á B: luego (12) C, que es suma de los antecedentes E, F, G, tiene con D suma de los conseqüentes H, K, L, la misma razon que E á H, ó que A á B.

COROLARIO.

Las partes aliquotas semejantes de los todos, tienen entre sí la misma razon que los todos, por ser estos equimultíplices de las partes aliquotas semejantes.

PROP. XVI. Teorema.

Si quatro cantidades de una misma especie son proporcionales directamente, lo serán tambien alternativamente.

A	B	C	D
8.	4.	6.	3.

Explicacion. Sean quatro cantidades de una misma especie. A, B, C, D, que sean directamente proporcionales, como A con B, así C con D. Digo inferirse legítimamente ser tambien proporcionales alternando, como A con C, así B con D.

Demonstracion. Por ser A con B, como C con D, serán B y D partes semejantes de A y C: (*def.* 7) luego (*por el corol. de la antecedente*) tendrán los todos A y C la misma razon de sus partes semejantes B y D.

ES-

ESCOLIO.

Consta por sí mismo con evidencia, que si A con B es como C con D directamente, tambien invirtiendo será D con C, como B con A, que es el corolario que trae Euclídes al fin de la proposicion 4 *de este libro, que se omitió por supérflua.*

PROP. XVII. Teorema.

Si las quantidades compuestas son proporcionales, lo serán tambien divididas.

A † B	B.		C † D	D.	
8.	4.	4.	6.	3.	3.

Explicacion. Digo que si son proporcionales A mas B con B; esto es, en el exemplo propuesto, 12 con 4, como C mas D con D; esto es, 9 con 3, que tambien serán proporcionales, dividiendo A con B, como C con D.

Demonstracion. Porque A † B con B, es como C † D con D, contendrá A † B tantas veces una parte aliquota de B, como C † D contiene una semejante de D: y como dicha parte aliquota se halle tantas veces en B, como la semejante en D, se sigue, que quitando B de A † B, quedarán en A tantas partes aliquotas de B, como quedarán en C quitándole D: luego será A con B, como C con D.

PROP. XVIII. Teorema.

Si las cantidades divididas son proporcionales, tambien lo serán compuestas.

M 8. P 4. N 6. Q 3.

Explicacion. Sea M con P, como N con Q. Digo que tambien será M † P con P, como N † Q con Q.

Demonstracion. Por ser M con P, como N con Q, tantas veces incluirá M qualquiera parte aliquota de P, quantas N incluye semejante parte aliquota de Q: luego como P y Q incluyen en sí igual número de dichas partes aliquotas, si se añade P á M y Q á N, M † P tendrá tantas partes aliquotas de P, quantas N † Q incluye semejantes aliquotas de Q: luego será M † P con P, como N † Q con Q.

CO-

COROLARIO.

De lo dicho se demuestra tambien la *razon conversa*; esto es, que $M + P$ es con M, como $N + Q$ con N; porque siendo como se supone $M + P$ á P, como $N + Q$ á Q; será dividiendo, (17) como M con P, así N con Q; é invirtiendo, (*cor. de la* 16) como P con M, así Q con N: luego componiendo, como $M + P$ con M, así $N + Q$ con N.

PROP. XIX.

Si de dos todos se restan dos cantidades que tienen entre sí la misma razon que los todos, tambien los residuos tendrán la misma razon que los todos.

Todos	12.	6.
	—	—
	4.	2.
Residuos	8.	4.

Explicacion. Sean los todos 12 y 6, de quienes se restan 4 y 2, que tienen entre sí la misma razon que los todos 12 y 6. Digo que los residuos 8 y 4 tienen entre sí la misma razon que 12 y 6. Vése claramente, porque así como 12 es doblado de 6, así 8 es doblado de 4.

Demonstracion. Porque 12 á 6, es como 4 á 2: luego alternando será como 12 á 4, así 6 á 2: luego dividiendo será $12-4$ á 4, como $6-2$ á 2; esto es, 8 á 4, como 4 á 2: luego siendo por suposicion 4 á 2, como 12 á 6, será 8 á 4, como 12 á 6.

PROP. XX. y XXI.

Segun este método son superfluas.

PROP. XXII. Teorema.

Si hay tres ó mas quantidades de una parte, como N, P, Q, y otras tantas de otra R, S, T, y fuere N con P, como R con S, y P con Q, como S con T, será verdadera conseqüencia ser N con Q, como R con T, que es lo que diximos igualdad ordenada.

N 12. P 6. Q 2. R 18. S 9. T 3.

Demonstracion. La razon de N á P es la misma que

de

de R á S; y la razon de P á Q es la misma que de S á T: luego la razon de N á Q, que se compone de las dos razones de N á P y de P á Q, (*def.* 13) será igual á la razon de R á T, compuesta de las razones de R á S y de S á T; porque componiéndose de igual número de razones iguales, necesariamente han de ser iguales.

PROP. XXIII. Teorema.

Si tres quantidades de una parte P, Q, R, y otras tres de otra S, T, V fueren proporcionales en esta forma, P con Q, como T con V, y Q con R, como S con T, será verdadero ser P con R, como S con V, que es lo que diximos igualdad perturbada ó desordenada.

P 12. Q 6. R 3. S 8. T 4. V 2.

Demuéstrase de la misma manera que la proposicion antecedente.

PROP. XXIV. Teorema.

Si la primera quantidad es á la segunda, como la tercera á la quarta, y una quinta quantidad fuere á la segunda, como otra sexta quantidad á la quarta, la compuesta de la primera y quinta será á la segunda, como la compuesta de la tercera y sexta á la quarta.

Explicacion Sea A con B, como C con D: y sea E con B, como F con D. Digo que A † E será con B, como C † F con D.

E 4. F 6.
A 6. B 2. C 9. D 3.

Demonstracion. Porque A es á B, como C á D, tantas veces contendrá A una parte aliquota de B, quantas C contiene semejante aliquota de D: asimismo por ser E á B, como F á D, contendrá E una aliquota de B tantas veces, quantas F una semejante de D: luego A y E juntas contendrán una aliquota de B tantas veces, quantas F y C contienen la semejante de D: luego será A † E á B, como C † F á D.

PROP.

PROP. XXV. Teorema.

En quatro quantidades proporcionales, la máxîma y mínima juntas, son mayores que las otras.

G 16. H 12. L 4. K 3.
M 4. N 3.
X 12. Z 9.

Explicacion. Las 4 quantidades G, H, L, K son proporcionales G con H, como L con K. Digo que G † K es mayor que H † L; esto es, que la máxîma y mínima juntas, son mayores que las otras.

Demonstracion De la máxîma G quítese M igual á L; y de la H quítese N igual á K, y será toda G á toda H, como la que se quitó M, á la otra que se quitó N: luego (19) será el residuo X, al residuo Z, como toda G á toda H; y como se haya supuesto ser G mayor que H, será la X mayor que Z, como se colige de la *def:* 7. Y siendo M igual á L, y N igual á K, serán M † K iguales á N † L: luego si á M † K se añade la X, que es mayor, y á N † L se añade Z, que es menor, resultará M † K † X, mayor que N † L † Z: y siendo M † X igual á G, y N † Z igual á H, será G † K mayor que H † L.

Aquí termina Euclídes el libro 5; *pero Campano, y comunmente los Geómetras añaden algunas proposiciones sacadas de Pappo Alexandrino y otros, que Arquimédes, Apolonio y diversos Autores citan como si fuesen de Euclídes: y aunque sin ellas se puede usar de estos elementos, por incluirse en lo demonstrado hasta ahora; pero no he querido omitir una breve explicacion suya, que podrá dexar de leer el principiante si le pareciere.*

PROP. XXVI. Teorema.

Si la razon de la primera á la segunda es mayor que de la tercera á la quarta, invirtiendo la de la quarta á la tercera, será mayor que la de la segunda á la primera.

E 4.
A 8. B 2. C 6. D 3.

Explicacion. La razon de A á B es mayor que la de C á D. Digo que invirtiendo, será la razon de D á C mayor que la de B á A.

Pre-

Preparacion. Supóngase que E es á B, como C á D; y así (10) será A mayor que E.

Demonstracion. E á B es como C á D: luego invirtiendo D á C, es como B á E; B á E tiene mayor razon que B á A: (8) luego D á C tiene mayor razon que B á A.

PROP. XXVII. Teorema.

Si la razon de la primera A á la segunda B, es mayor que la de la tercera C á la quarta D; alternando será la razon de A á C, mayor que la de B á D.

Demonstracion. Supuesto, como en la precedente, que E es á B, como C á D, se sigue ser A mayor que E, y que alternando (16) es E á C, como B á D; y siendo A mayor que E, la razon de A á C será mayor que la de E á C: luego tambien es mayor que la de B á D.

PROP. XXVIII. Teorema.

Si la razon de la primera á la segunda es mayor que la de la tercera á la quarta, tambien componiendo será la razon de la primera y segunda á la segunda, mayor que la de la tercera y quarta á la quarta.

Explicacion. En los mismos proporcionales A con B tiene mayor razon que C con D. Digo que componiendo A + B con B tiene tambien mayor razon que C + D con D. Supóngase como ántes, que E á B sea como C á D; y será A mayor que E.

Demonstr. E á B es como C á D: luego (18) E + B á B es como C + D á D; pero A + B es mayor que E + B: luego A + B tiene mayor razon con B, que E + B con B: luego mayor que C + D con D.

PROP. XXIX. Teorema.

Si la razon de la A + B á B es mayor que la de C + D á D, tambien la de A á B será mayor que la de C á D.

Consta de la antecedente.

PROP. XXX. Teorema.

Si la razon de la A + B á B es mayor que la de C + D á D, la razon de C + D á C será mayor que la de A + B á A.

Consta de la *proposicion* 26.

PROP. XXXI. y XXXII. Teoremas.

Si tres quantidades están en mayor razon á otras tantas puestas en el mismo órden ó en diferente, la primera de las primeras tendrá mayor razon á su última, que la primera de las otras á su última.

La razon es, porque la primera de las primeras á su última tiene razon compuesta de igual número de mayores razones, que la primera de las otras á su última; (*def.* 13.) luego la primera y última de las primeras tienen mayor razon, que la primera y última de las otras.

PROP. XXXIII. Teorema.

Si el todo tiene mayor razon al todo, que la parte restada á la parte restada, tendrá el residuo al residuo mayor razon, que el todo al todo.

E 12. F 3. G 6. H 2.

Explicacion. El todo ó suma E † F tiene mayor razon con el todo G † H, que la parte F con la parte H. Digo que quitadas estas cada una de su todo, tendrá el residuo E al residuo G mayor razon que el todo E † F al todo G † H.

Demonstracion. Porque hay mayor razon de E † F á G † H, que de F á H; alternando (27) habrá mayor razon de E † F á F, que de G † H á H; y convirtiendo (30) habrá menor razon de E † F á E, que de G † H á G: luego alternando otra vez habrá menor razon de E † F á G † H, que de E á G.

PROP. XXXIV. Teorema.

Las razones duplicadas, triplicadas, &c. de razones iguales, son tambien iguales entre sí.

La razon es, porque se componen de igual número de razones iguales, (*def.* 14) y no necesita de mas demonstracion, por ser como Axîoma.

PROP. XXXV. Teorema.

Si las razones duplicadas ó triplicadas, &c. de otras razones son iguales, tambien lo serán aquellas, de quienes son duplicadas ó triplicadas, &c.

Es tambien como Axîoma, y se infiere de la antecedente.

LI-

LIBRO VI.

TOda la doctrina de las proporciones que contiene el libro pasado, se contrae y aplica en este á las figuras planas. Llámase con razon *libro de oro*, por la nobleza y fecundidad de sus proposiciones: y conviene se ponga todo cuidado en comprehenderlas, porque sin ellas jamas se podrán registrar los arcanos mas recónditos de la Geometría.

DEFINICIONES.

1 *Figuras rectilíneas semejantes son las que tienen todos sus ángulos iguales, cada uno á su correspondiente; y los lados que forman dichos ángulos iguales, proporcionales.* Como los triángulos ABC, DEF (*fig.* 1.) serán semejantes, si los ángulos A y D, B y E, C y F fueren iguales: y el lado AB á BC, como DE á EF, y BC á CA, como EF á FD; y lo mismo en las demas figuras.

2 *Figuras recíprocas son las que tienen los lados recíprocos; esto es, que son sus lados de tal manera proporcionales, que el primero y quarto término se hallan en la una figura, y el segundo y tercero en la otra.* Con que empezando la proporcion en la una, pasa á la otra; y de esta vuelve á la primera. Como si en los paralelógramos FA, EC (*fig.* 2.) fuere el lado AB al lado CD, como el lado ED al lado FB, serán los lados recíprocos y las figuras recíprocas.

3 *Una línea recta se dice estar dividida en media y extrema razon, quando se divide de tal suerte en dos segmentos, que toda la línea al mayor segmento tiene la misma razon, que el mayor segmento al menor.* Como si la línea MN (*fig.* 2.) de tal suerte está dividida en O, que toda la MN tenga con MO la misma razon, que MO con ON.

4 *La altura de qualquiera figura, es la perpendicular tirada del vértice de la figura á su basa*: y esta perpendicular á veces cae dentro, á veces fuera de la figura. Como la altura de los triángulos ABC (*fig.* 3.) es la per-

F 2 pen-

pendicular AD. De que se colige, que los triángulos y paralelógramos que tienen una misma altura, se pueden colocar entre unas mismas paralelas; y los que tienen un mismo vértice, y sus basas están sobre una misma recta, tienen una misma altura, por ser comun á entrambos la perpendicular que cae del vértice á la basa.

5 *Arcos semejantes de círculo, se llaman los que tienen una misma razon con la circunferencia entera de su círculo.* Como si entrambos fueren el tercio ó el quarto de su círculo.

PROP. I. Teorema.

Los triángulos y paralelógramos que tienen una misma ó igual altura, tienen la misma razon que sus basas. (*fig.* 4.)

De este Teorema que es bien fácil, depende todo este *libro* 6. Sean pues los triángulos ABC, EFG que tengan una misma altura. Digo que tendrán entre sí la misma razon que las basas AC, EG; esto es, que si por exemplo AC es doblada de EG, tambien el triángulo ABC será doblado del triángulo EFG.

Preparacion. Supongo pues sea la basa AC doble de EG: pártase por medio en I, y será tanto AI, como IC igual con EG. Y tírese la recta IB; y supuesto que dichos triángulos tienen igual altura, podrán estar entre unas mismas paralelas AG, DF.

Demonstracion. Los triángulos IBC, EFG, por tener iguales basas y estar entre paralelas, son iguales: (38, 1.) asimismo son iguales por la misma razon los triángulos ABI, EFG: luego el triángulo ABC incluye dos veces al triángulo EFG, así como la basa AC incluye dos veces la basa EG: luego (*def.* 7, *lib.* 5) el triángulo ABC tiene con el triángulo EFG la misma razon, que la basa AC á la basa EG. Lo que he demonstrado en la razon dupla, se demonstrará de la misma suerte en otra qualquiera.

Digo tambien, que los paralelógramos DC, NG que tienen igual altura, se han como las basas; porque el paralelógramo DC es doble del triángulo ABC; (41, 1) y el paralelógramo NG es doble del triángulo EFG: luego (15, 5) dichos paralelógramos tienen la misma razon entre sí, sí, que los triángulos; estos tienen la razon misma de las basas: luego tambien aquellos.

COROLARIO.

Los triángulos y paralelógramos que tienen una misma ó igual basa, se han como sus alturas; porque el mismo argumento se hace de las alturas siendo las basas iguales, que hicimos de las basas siendo iguales las alturas.

PROP. II. Teorema.

Si en un triángulo se tira una paralela á uno de sus lados, esta línea cortará los otros lados en dos segmentos proporcionales: y si se dividen en segmentos proporcionales, la línea que les divide será paralela al otro lado. (fig. 5.)

Explicacion. En el triángulo HIK, la línea LM es paralela al lado IK. Digo que esta línea corta los lados HI, HK proporcionalmente en los puntos L, M de suerte, que HL á LI es como HM á MK.

Preparacion. Tírense las rectas LK, MI.

Demonstracion. Los triángulos MLI, LMK, por tener una misma basa LM, y estar entre las paralelas LM, IK, son iguales: (37, 1) luego (7, 5) el triángulo HLM la misma razon tiene con el triángulo MLI, que con el triángulo LMK; y como los triángulos HLM, MLI tengan una misma altura, por tener el vértice M comun, (*def.* 4) tendrán entre sí (1) la misma razon que sus basas HL, LI; y por la misma razon los triángulos HLM, MLK tendrán la razon de sus basas HM, MK: teniendo pues el triángulo HML la misma razon con el triángulo LMI, que con LMK, la misma razon tendrá la basa HL con la basa LI, que la basa HM con la basa MK.

Digo tambien, que si la LM divide los lados proporcionalmente de suerte, que HL con LI sea como HM á MK, dicha línea será paralela á la IK.

Demonstracion. Por lo demonstrado, el triángulo HLM, al triángulo LMI tiene la misma razon que la basa HL á la basa LI: tambien el triángulo mismo HLM al triángulo LMK tiene la razon de la basa HM á la basa MK: y co-

como se suponga ser HL con LI como HM con MK, la misma razon tiene el triángulo HLM con el triángulo LMI, que con LMK: luego estos dos triángulos son iguales, y como tengan una misma basa LM, estarán entre dos paralelas LM, IK. (39, 1)

PROP. III. Teorema.

La recta que divide un ángulo de qualquiera triángulo en dos partes iguales, divide la basa en segmentos proporcionales á los lados del triángulo; y la línea que partiendo la basa en segmentos proporcionales á los lados divide el ángulo, le divide en dos partes iguales. (*fig.* 6.)

Explicacion. El ángulo N del triángulo MNQ, se supone dividido en dos partes iguales con la línea NP. Digo que esta línea divide la basa MO en los dos segmentos MP, PO, que tienen entre sí la misma razon que los lados del triángulo; esto es, que OP á PM tiene la misma razon que ON á NM.

Preparacion. Alárguese ON hasta Q de suerte, que NQ sea igual á NM, y júntese la QM.

Demonstr. El ángulo ONM es externo respecto del triángulo MNQ: luego (32, 1) es igual á los dos internos opuestos Q y NMQ: y siendo estos iguales por oponerse á los lados iguales NM, NQ, (5, 1) qualquiera de ellos como QMN, será tanto como la mitad del ángulo MNO; y siendo tambien por la suposicion el ángulo MNP mitad del ángulo MNO, serán los ángulos NMQ, MNP iguales: y como sean alternos, serán (28, 1) las líneas QM, NP paralelas: luego (2) será ON á NQ, como OP á PM; y siendo NM igual á NQ, será ON á NM, como OP á PM.

Digo tambien, que si la NP divide la basa MO en los segmentos OP, PM proporcionales con los lados; esto es, que OP á PM sea como ON á NM, el ángulo MNO quedará dividido en dos partes iguales.

Demonstr. Porque las líneas MN, NQ son iguales, siendo por suposicion MN á NO, como MP á PO, será QN á NO, como MP á PO: luego (2) las líneas QM, NP son paralelas; y por consiguiente (27, 1) los ángulos alter-

nos

nos QMN, MNP serán iguales; y siendo (32, 1) todo el ángulo MNO igual á los dos internos opuestos Q y QMN; siendo como se ha demonstrado, el ángulo MNP igual al ángulo QMN, será el ángulo PNO igual al ángulo Q: y siendo los ángulos NMQ y Q iguales, (5, 1) serán tambien iguales los ángulos MNP, PNO; y todo el MNO estará dividido en dos partes iguales.

PROP. IV. Teorema.

Los triángulos equiángulos tienen los lados que forman ángulos iguales proporcionales, y los opuestos á los ángulos iguales, son homólogos. (fig. 7.)

Explicacion. Sean los triángulos RQS, TVX equiángulos; esto es, el ángulo S sea igual al ángulo X; R á T, y Q á V. Digo que los lados que forman iguales ángulos, son proporcionales en el uno y en el otro; esto es, RS á SQ, como XT á XV; QR á RS, como VT á TX.

Preparacion. Por ser el ángulo S igual al ángulo X; si S se pone sobre X, las rectas SR, SQ vendrán sobre XT, XV de suerte, que SR ocupará á XR, y SQ á XQ: tírese la QR, y todo el triángulo SRQ se ajustará al triángulo XRQ.

Demonstracion. El ángulo XRQ se supone igual al ángulo T: luego la XT entra con iguales ángulos en las RQ, TV: luego (29, 1) dichas líneas son paralelas: luego (2) será XQ á QV, como XR á RT; y componiendo será XV á XQ, como XT á XR; y alternando será XV con XT, como XQ con XR. De la misma suerte demonstraria, que los lados QR, RS son proporcionales con VT, TX, ajustando el ángulo R sobre el ángulo T.

Consta tambien claramente, que los lados XV, XQ opuestos á los ángulos iguales T y R son homólogos, por ser antecedentes en la dicha proporcion; como tambien XT y XR opuestos á los ángulos iguales V y Q, por ser conseqüentes.

COROLARIOS.

Primero. Si dentro de un triángulo VTX se tira una paralela QR á uno de sus lados, serán los triángulos VTX, RQX

RQX equiángulos y semejantes, y será XT á XR como TV á RQ.

Segundo. Para asegurar que los triángulos son semejantes, basta conocer ser equiángulos el uno al otro; porque siendo equiángulos, tendrán los lados proporcionales, y por consiguiente tendrán las dos condiciones requisitas para ser semejantes. (*def.* 1.)

Tercero. Si en qualquiera triángulo XVT se tira una línea XZ del ángulo opuesto que corte dichas paralelas, las cortará proporcionalmente en Z y O; porque será VZ á QO (*corol.* 1) como ZX á OX; y tambien ZT á OR como ZX á OX: luego VZ á QO es como ZT á OR; y alternando VZ á ZT como QO á OR.

PROP. V. Teorema.

Si los lados de un triángulo son proporcionales á los de otro triángulo, serán los triángulos equiángulos; y los ángulos opuestos á los lados homólogos, serán iguales. (*fig.* 8.)

Explicacion. Los triángulos ACB, DFE se supone tienen los lados proporcionales; esto es, AC á CB, como DF á FE, y AB á BC, como DE á EF. Digo que los ángulos C y F, como tambien A y D, B y E son iguales.

Preparacion. Hágase el ángulo EFG igual al ángulo C, y el ángulo FEG al ángulo B: con que el ángulo G será tambien igual al ángulo A; y los triángulos ACB, EFG serán equiángulos.

Demonstracion. Por ser los triángulos ABC, EFG equiángulos, serán (4) sus lados proporcionales; esto es, AC á CB, como GF á FE: y siendo (*por suposicion*) AC á CB, como DF á FE, será (11, 5) GF á FE, como DF á FE: luego (7, 5) GF y DF son iguales. De la misma suerte probaré, que GE es igual á ED; con que los triángulos DFE, GFE tienen los dos lados FG, GE iguales á los dos FD, DE y FE comun: luego (8, 1) dichos triángulos son totalmente iguales y equiángulos; y siendo ACB, FGE equiángulos, (*por construccion*) serán ACB y DFE equiángulos; de suerte, que el ángulo A será igual á D, B á E, y C á F, que son los opuestos á los lados homólogos.

PROP.

PROP. VI. Teorema.

Si dos triángulos tienen un ángulo igual, y los lados que comprehenden este ángulo son proporcionales, los triángulos serán equiángulos. (*fig.* 8.)

Explicacion. Los triángulos ACB, FED tienen los ángulos C y F iguales; y el lado AC al lado CB tiene la misma razon, que el lado DF al lado FE. Digo que los triángulos son equiángulos.

Preparacion. Hágase el ángulo EFG igual al ángulo C, y el ángulo FEG igual á B; y será como en la antecedente, el ángulo G igual al ángulo A, y los triángulos FEG, ACB equiángulos.

Demonstracion. Por ser los triángulos FEG, ACB equiángulos, será GF á FE como AC á CB; y siendo (*por suposicion*) AC á CB como DF á FE, será GF á FE como DF á FE: luego (7, 5) GF y DF son iguales; y por consiguiente, en los triángulos DFE, GFE el lado DF es igual á FG y FE comun; y los ángulos DFE, EFG iguales, por serlo entrambos al ángulo C: luego (4, 1) los triángulos DFE, EFG son totalmente iguales y equiángulos; y siendo EFG equiángulo con ACB, tambien DFE será equiángulo con ACB.

PROP. VII. Se omite.

PROP. VIII. Teorema.

En el triángulo rectángulo, la perpendicular que baxa del ángulo recto á la basa, divide el triángulo en dos triángulos semejantes al total y entre sí. (*fig.* 9.)

Explicacion. Sea el triángulo GHL rectángulo en H; del ángulo recto H cae la perpendicular HI á la basa. Digo que el triángulo GHL queda dividido en dos triángulos HGI, HIL semejantes al triángulo total GHL y entre sí.

Demonstracion. Los triángulos GHL, HIG tienen los ángulos GHL, HIG rectos é iguales, y el ángulo G comun: luego los restantes ángulos GHI y L son tambien iguales: (32, 1) luego los triángulos GHL, GHI son equiángulos. De la misma suerte probaré ser equiángulos los triángulos

GHL

GHL, HIL: luego todos son equiángulos, y (4) tienen sus lados proporcionales; luego son semejantes.

COROLARIOS.

1 *Síguese de lo dicho, que la línea HI es media proporcional entre las líneas GI, IL; porque siendo los triángulos HGI, HIL semejantes, tienen los lados proporcionales, como GI lado menor del triángulo GHI, con HI lado mediano del mismo triángulo; así el mismo HI lado menor del triángulo HIL, con IL lado mediano del mismo triángulo: luego HI es media proporcional entre GI, IL.*

2 *Síguese tambien, que el lado HG es medio proporcional entre GL y el segmento GI; porque es por la dicha razon GL con GH, como GH con GI; y asimismo es el lado HL medio proporcional entre GL y LI, por ser GL con HL como HL con IL.*

PROP. IX. Problema.

De una recta dada HO, (fig. 10.) cortar una quarta parte ú otra qualquiera.

Operacion. Tírese á arbitrio qualquiera recta HR; y porque se pide la quarta parte de HO, tómense con qualquiera intervalo en la HR quatro partes iguales HI, IL, LM, MR: tírese la línea RO, y del punto I sáquese la IN paralela á RO, y HN será la quarta parte de HO.

Demonstracion. Por ser IN paralela al lado RO, será (2) HI á IR como HN á NO: y componiendo (18, 5) será HR con HI como HO con HN: luego siendo HI la quarta parte de HR, será HN la quarta parte de HO.

PROP. X. Problema.

Dividir una recta dada, segun otra estuviere dividida. (fig. 11.)

Explicacion. La línea MN se propone dividida en O en dos partes tales, que la ON es doblada de MO: y se pide, que la recta dada MR se divida en otras dos partes que guarden la misma proporcion.

Operacion. Tírese la RN, y por O tírese la OL paralela á RN; y quedará dividida MR en L como se pide.

De-

Demonstr. Por ser LO paralela á RN, es (2) RL á LM como NO á OM; NO es doblada de OM: luego RL es doblada de LM.

PROP. XI. Problema.

Dadas dos rectas, hallarles una tercera proporcional. (*fig.* 12.)

Explicacion. Dadas las rectas PS, PR, se pide la tercera proporcional.

Operacion. Dispónganse de manera, que formen qualquier ángulo. Añádase en derechura SQ igual á PR: tírese la SR, y del punto Q hágase la QT paralela á SR, que cortará á la PR alargada en T. Digo que RT es la tercera proporcional.

Demonstr. Por ser RS, TQ paralelas, será (2) PS á SQ como PR á RT: luego siendo PR igual á SQ, será PS á PR como PR á RT: luego RT es la tercera proporcional.

PROP. XII. Problema.

Dadas tres rectas, hallar una quarta proporcional. (*fig.* 13.)

Explicacion. Sean dadas las tres rectas MN, NV, MR, y se pide una quarta proporcional.

Operacion. Dispónganse las dos primeras MN, NV en una línea recta, y la tercera MR que haga qualquier ángulo. Tírese NR, y del punto V tírese la VT paralela á NR que encuentre la MR alargada en T, y RT será la quarta proporcional.

Demonstr. Por ser paralelas NR, VT, es MN á NV como MR á RT: luego RT es quarta proporcional.

PROP. XIII. Problema.

Dadas dos rectas, hallar entre ellas una media proporcional. (*fig.* 14.)

Explicacion. Sean dadas VZ, ZT, y se pide una otra recta que sea media proporcional entre ellas.

Operacion. Júntense las dadas en derechura, de suerte que hagan una línea recta VT. Divídase VT por medio en Y; y con la distancia YV hágase un semicírculo: del punto Z levántese la perpendicular ZX; y esta será la media proporcional.

Demonstracion. El ángulo VXT es recto, por estar

en

en el semicírculo: (31, 3) luego (*corol. de la* 8) la XZ es media proporcional entre VZ, ZT.

COROLARIO.

De aquí se infiere, que si de qualquiera punto de la circunferencia baxa una perpendicular al diámetro, que esta será media proporcional entre sus segmentos.

PROP. XIV. Teorema.

Los paralelógramos iguales que tienen un ángulo igual, tienen los lados que forman dicho ángulo recíprocos, y los que tienen dichos lados recíprocos, son iguales. (*fig.* 15.)

Explicacion. Sean los paralelógramos M y O iguales: y tengan los ángulos ACB, GCD iguales. Digo que los lados que forman dichos ángulos son recíprocos; esto es, que el lado AC del paralelógramo M al lado CD del paralelógramo O, es como el lado GC del paralelógramo O al lado CB del paralelógramo M.

Preparacion. Júntense los ángulos C iguales de suerte, que los lados AC, CD hagan una línea recta; y necesariamente BC, CG harán otra línea recta; porque el ángulo BCD con el ángulo BCA, hace dos rectos; (13, 1) y como el ángulo BCA se suponga igual al ángulo GCD, es forzoso que el ángulo BCD con el DCG haga tambien dos rectos: luego (14, 1) BCG es una línea recta. Perficiónese el paralelógramo N.

Demonstr. Por ser los paralelógramos M y O iguales, la misma razon tiene el paralelógramo M al paralelógramo N, que el paralelógramo O al mismo N: (7, 5) y como el paralelógramo M al N tenga (1) la razon de AC á CD, por tener entrambos una misma altura CB; y el paralelógramo O al N tenga la razon de GC á CB, por tener entrambos la misma altura CD, se sigue, que la misma razon tiene el lado AC del paralelógramo M al lado CD del paralelógramo O, que el lado GC del mismo O al lado CB de M.

Digo tambien, que si los paralelógramos M y O tienen dichos lados recíprocos, son iguales.

Demonstracion. Por tener los paralelógramos M y N una misma altura CB, será el paralelógramo M al N, (1)

co-

como la basa AC á la basa CD. Asimismo, por tener los paralelógramos O y N una misma altura CD, será el paralelógramo O al N, como la basa GC á la basa CB: y como se suponga tener la basa AC á CD la misma razon que la basa GC á CB, se sigue, que la misma razon tiene el paralelógramo M al paralelógramo N, que el paralelógramo O al mismo N: luego (9, 5) los paralelógramos M y O son iguales.

PROP. XV. Teorema.

Los triángulos iguales que tienen entre sí un ángulo igual, tienen los lados que forman dicho ángulo recíprocos; y si estos lados son recíprocos, los triángulos son iguales.

Consta de lo demonstrado en la antecedente; porque tiradas las diagonales en la misma figura, se hará de los triángulos la misma demonstracion que se hizo de los paralelógramos.

COROLARIO.

Consta de lo dicho, que tanto los paralelógramos, como los triángulos que tienen las basas y alturas recíprocas, son iguales.

PROP. XVI. Teorema.

Si quatro líneas fueren proporcionales, el rectángulo hecho de las extremas es igual al rectángulo hecho de las medias; y si el rectángulo de las extremas fuere igual al de las medias, serán dichas quatro líneas proporcionales. (*fig.* 16.)

Explicacion. Sean las quatro líneas proporcionales AB á CD, como EC á FA; y de las AB, FA, que son las extremas, hágase el rectángulo G; y de las CD, CE, que son las medias, hágase el rectángulo H. Digo que los rectángulos G y H son iguales.

Demonstracion. Los rectángulos G y H son equiángulos, y tienen los lados recíprocos, como AB á CD, así CE á AF: luego (14) son iguales.

Digo tambien, que si G y H son iguales, tendrán los lados recíprocos; y será AB á CD, como CE á AF: (14) luego son proporcionales.

PROP.

PROP. XVII. Teorema.

Si tres rectas son proporcionales, será el rectángulo hecho de las extremas, igual al quadrado hecho de la media; y al contrario, si el quadrado de la media fuere igual al rectángulo de las extremas, las tres líneas serán proporcionales. (*fig.* 17.)

Explicacion. Sean las tres proporcionales IL á MN, como MN á OP. Digo que el rectángulo que se hiciere de las extremas IL, OP, será igual al quadrado de la media MN.

Demonstracion. Tomando otra vez la MN, serán quatro proporcionales IL á MN, como la segunda MN á OP: luego (16) el rectángulo de las extremas IL, OP será igual al rectángulo de las medias MN, MN; y como el rectángulo de estas sea quadrado por ser ellas iguales, será el rectángulo de las extremas igual al quadrado de la media.

Asimismo, si el rectángulo de las extremas IL, OP es igual al quadrado de la media MN, será (16) como IL á MN, así MN á OP.

COROLARIO.

De lo dicho se colige la demonstracion del problema de la *proposicion* 14 del *libro* 2; porque (*fig.* 16. del *lib* 2) la NO es media proporcional entre PN y NX: (13) luego el quadrado de NO será igual al rectángulo hecho de PN, NX.

PROP. XVIII. Problema.

Sobre una recta dada describir un polígono semejante á otro y semejantemente descrito. (*fig.* 18.)

Explicacion. Ser dos polígonos semejantes y descritos sobre las rectas semejantemente, consiste en que los ángulos iguales se formen sobre dichas rectas de la misma manera en el uno que en el otro; y los demas ángulos iguales y los lados proporcionales guarden en entrambas un mismo órden. Pídese pues, que sobre la recta dada IK se forme un rectilíneo semejante al rectilíneo MR, y sea semejantemente descrito.

Ope-

Operacion. Divídase el rectilíneo MR en triángulos, tirando la LN; y sobre la IK hágase el ángulo I igual á M, y el ángulo OKI igual á LNM, y serán los triángulos IOK, MLN equiángulos. (32, 1) Hágase ahora el ángulo POK igual al ángulo RLN, y OKP igual á LNR, y serán los triángulos OPK, LRN equiángulos. Digo que el rectilíneo IP será semejante á MR.

Demonstracion. Por ser los triángulos parciales de cada polígono equiángulos, son tambien equiángulos los polígonos. Y porque los triángulos OIK, LMN son equiángulos, es (4) IK á KO, como MN á NL. Tambien por ser equiángulos los triángulos POK, RLN, es KO á KP como NL á NR: son pues proporcionales tres de una parte y tres de otra, como se sigue:

IK, KO, KP, MN, NL, NR:

Luego por igualdad ordenada (22, 5) será IK á KP como MN á NR, y así de los demas lados: luego los polígonos son equiángulos, y tienen los lados proporcionales: luego son semejantes.

PROP. XIX. Teorema.

Los triángulos semejantes están en razon duplicada de la de sus lados homólogos. (fig. 19.)

Explicacion. Sean los triángulos *b* y *q* semejantes. Digo que tienen entre sí la razon duplicada de los lados homólogos; esto es, que el triángulo *b* al triángulo *q* tiene razon duplicada de la que tiene el lado AB con el lado BC.

Preparacion. Dispónganse los triángulos de tal manera, que los lados AB, BC hagan una recta; y añádase CD tal, que AB á BC tenga la misma razon que BC á CD: y tírense las líneas EC, ED.

Demonstracion. La misma razon hay de AB á BC, que de BC á CD; y pues por la similitud de los triángulos, la razon de EB á BF es la misma que de AB á BC, será tambien la razon de EB á BF la misma que de BC á CD. Esto supuesto, por tener los triángulos *d* y *r* una misma altura, tiene (1) el triángulo *d* al triángulo *r* la razon de BC á CD; y por la misma causa tiene el mismo triángulo *d* al triángulo *q* la razon de EB á BF: luego el triángulo *d* la misma razon tiene con el triángulo *r*, que con

el

el triángulo q : luego (9, 5) los triángulos r y q son iguales : luego el triángulo b la misma razon tiene con el triángulo q, que con el triángulo r : luego como el triángulo b al triángulo r tenga la razon de la basa AB á la basa CD, tendrá b á q la razon de la basa AB á la basa CD ; y como esta razon de AB á CD sea duplicada de la que hay de AB á BC (por ser AB, BC, CD continuas proporcionales) tendrá el triángulo b al triángulo q razon duplicada del lado AB al lado BC.

PROP. XX. Teorema.

Los polígonos semejantes se dividen en igual número de triángulos semejantes y proporcionales á sus todos ; y los polígonos semejantes tienen entre sí la razon duplicada de los lados homólogos. (*fig.* 20.)

Explicacion. Sean los polígonos semejantes A y B. Digo lo primero, que se pueden dividir en igual número de triángulos semejantes.

Preparacion. Tírense las rectas PM, PO, y LI, LH, y quedará dividido en tantos triángulos el uno como el otro.

Demonstracion. Por ser los polígonos A y B semejantes, los ángulos N y G (*def.* 1.) son iguales ; y el lado PN á NO, es como LG á GH : luego (6) los triángulos PNO, LGH son equiángulos y semejantes. Asimismo probaré, que los triángulos PQM, LKI son equiángulos y semejantes. Tambien por ser todo el ángulo O igual al ángulo H, y todo M á I, si del ángulo total O quitamos el ángulo PON, y del ángulo total H quitamos el ángulo LHG iguales de iguales, quedarán iguales los ángulos POM, LHI. Asimismo demonstraré ser iguales los ángulos PMO, LIH : luego los triángulos MPO, ILH son equiángulos : luego los tres triángulos en que se divide el polígono A, son equiángulos y semejantes á los tres en que se divide el polígono B.

Digo lo segundo, que los dichos triángulos son proporcionales con sus todos ; esto es, que qualquiera triángulo del polígono A á su correspondiente en el polígono B, tiene la misma razon que el polígono A al polígono B.

Demonstracion. Por ser los triángulos PNO, LGH semejantes, tienen entre sí la razon duplicada de los lados

ho-

homólogos PO, LH. (19) Y por la misma razon los triángulos PMO, LIH tienen la razon duplicada de los mismos lados PO, LH: luego la misma razon tiene el triángulo PNO al triángulo LGH, que el triángulo PMO al triángulo LIH. De la misma suerte probaré, que el triángulo PQM al triángulo LKI tiene la misma razon, que el triángulo PMO al triángulo LIH: luego cada triángulo de un polígono tiene la misma razon á su correspondiente en el otro polígono: luego todos los del uno juntos tienen la misma razon á todos los del otro juntos, que cada uno de por sí á su correspondiente: luego un polígono al otro tiene la misma razon, que cada triángulo á su correspondiente.

Digo lo tercero, que los rectilíneos semejantes, como A y B tienen la razon duplicada de los lados homólogos; porque tienen entre sí la misma razon que los triángulos, los quales (19) tienen la razon duplicada de los lados homólogos.

COROLARIOS.

Si hay tres líneas proporcionales A, B, C, la misma razon que hay de la primera á la tercera, tendrá el polígono hecho sobre la primera A al polígono semejante hecho de la misma manera sobre la segunda B; porque el polígono A al polígono B tiene razon duplicada del lado A al lado B; la razon que hay de A á C, es duplicada de la de A á B: luego el polígono A al polígono B es como la línea A á la línea C.

PROP. XXI. Teorema.

Los rectilíneos que son semejantes á un tercero, son semejantes entre sí.

Consta de la *prop.* 11 del 5 y del 1 *axioma* del *lib.* 1.

PROP. XXII. Teorema.

Si quatro líneas son proporcionales, los rectilíneos semejantes descritos semejantemente sobre ellas serán proporcionales; y si estos fueron proporcionales, tambien lo serán las líneas. (fig. 21.)

Explicacion. Sean las quatro líneas proporcionales AB á CD, como GH á KI. Digo que los polígonos semejantes E, F descritos sobre AB, CD, son proporcionales á otros qualesquiera polígonos semejantes L, M descritos semejantemente sobre GH, KI.

Demonstracion. (20) El rectilíneo E al rectilíneo F tiene la razon duplicada de AB á CD: y porque AB á CD tiene la misma razon que GH á KI, tendrá el rectilíneo E al rectilíneo F la razon duplicada de GH á KI: y como el rectilíneo L al rectilíneo M tenga tambien la razon duplicada de GH á KI, tendrá el rectilíneo E al rectilíneo F la misma razon que L á M. Digo lo segundo, que si el rectilíneo E á F tiene la misma razon que L á M, será AB á CD como GH á KI.

Demonstracion. E á F tiene razon duplicada de AB á CD: luego como L á M tenga la misma razon que E á F, tendrá L á M tambien la razon duplicada de AB á CD: y como L á M tenga la razon duplicada de GH á KI, se sigue, que la razon de AB á CD es la misma que de GH á KI.

PROP. XXIII. Teorema.

Los paralelógramos equiángulos tienen la razon compuesta de los lados. (*fig.* 15.)

Explicacion. Sean los paralelógramos M y O equiángulos. Digo que la razon que tienen entre sí se compone de las razones de AC á CD, y de BC á CG.

Preparacion. Júntense los paralelógramos por los ángulos C iguales, de suerte, que ACD, BCG formen líneas rectas; y perficiónese el paralelógramo N. Y para mayor claridad supongamos, que AC es doble de CD, como por exemplo 12 con 6, y que BC sea subtripla de CG, como 6 con 18. Esto supuesto, demonstraré, que la razon de M á O se compone de las razones de AC á CD, y de BC á CG.

Demonstracion. (1) M á N es como AC á CD; esto es, como 12 á 6, y N á O es como BC á CG; esto es, como 6 á 18: con que hay tres términos de una parte, y otros tres de otra, comparados igualmente como se sigue:

M, N, O, 12. 6. 18.

Luego por igualdad ordenada (22, 5) será M á O como 12 á 18; esto es, como AC á CG, que es la razon compuespuesta de las dos intermedias AC á CD, ó 12 á 6, y BC á CG, ó 6 á 18. Lo que se ha dicho de los paralelógramos se ha de entender tambien de los triángulos.

PROP. XXIV. Teorema.

En qualquiera paralelógramo, los paralelógramos parciales que son cortados por la diagonal, son semejantes entre sí y al total. (fig. 22.)

Explicacion. En el paralelógramo PN, la diagonal corta los paralelógramos ST, QR. Digo que estos son semejantes al total PN y entre sí.

Demonstracion. Los triángulos OIR, OMN tienen el ángulo en O comun; y la basa IR es paralela á la basa MN por suposicion: luego tendrán los ángulos en R y N iguales; y por consiguiente serán equiángulos, (32, 1) y será OR á RI, como ON á NM: luego (*def.* 1) dichos triángulos serán semejantes: y siendo estos las mitades de los paralelógramos QR, PN, (34, 1) serán tambien estos semejantes. Asimismo probaré ser ST semejante á PN: luego los paralelógramos QR y ST son semejantes al total PN y entre sí. (21)

RROP. XXV. Problema.

Construir un rectilíneo igual á uno, y semejante á otro. (fig. 23.)

Explicacion. Sean propuestos dos rectilíneos A y B: y se pide se construya un rectilíneo que sea semejante á A é igual á B.

Cperacion. Hágase sobre el lado CD el rectángulo CE igual á A: (45, 1) y sobre DE hágase el paralelógramo DH igual á B, y que sea equiángulo á CE. Búsquese (13) una media proporcional entre CD, DG, y sea IK, sobre la qual se describirá el rectilíneo L semejante á A, y este será igual á B.

Demonstracion. Por ser CD, IK, DG proporcionales, será (*cor. de la* 20) el rectilíneo A hecho sobre CD, primera; al rectilíneo L hecho sobre IK, segunda: como CD primera, á DG tercera: y como el paralelógramo CE al paralelógramo DH, sea (1) como CD á DG, será el rectilíneo A al rectilíneo L, como el paralelógramo CE á DH; el paralelógramo CE, por construccion, es igual al rectilíneo A, y DH á B: luego el rectilíneo A al rectilíneo L tiene la misma razon que al rectilíneo B: luego (9, 5) B y L serán iguales.

PROP. XXVI. Teorema.

Si dentro de un paralelógramo se describe otro semejante, de suerte que tenga con él un ángulo comun, el diametro del mayor pasará por el ángulo del menor opuesto al ángulo comun.

Esta proposicion consta de la 24, y no necesita de mas demonstracion: y las demas hasta la 30 no son menester.

PROP. XXX. Problema.

Dividir una recta dada en media y extrema razon. (*fig.* 23.)

Operacion. Divídase la recta OP propuesta en Q (11, 2) de tal suerte, que el rectángulo hecho de toda OP, y el segmento PQ sea igual al quadrado de OQ; y será (17) toda OP á OQ, como OQ á PQ, que es lo que se debia hacer.

PROP. XXXI. Teorema.

En qualquiera triángulo rectángulo, el rectilíneo descrito sobre el lado opuesto al ángulo recto, es igual á los rectilíneos semejantes descritos semejantemente sobre los otros lados. (*fig.* 24.)

Explicacion. Sea el triángulo BAC rectángulo en A. Digo que qualquiera rectilíneo D descrito sobre el lado BC opuesto al ángulo recto A, es igual á los rectilíneos F, E semejantes á D, y descritos semejantemente sobre los lados AB, AC.

Demonst. Los rectilíneos D, E, F, por ser semejantes, tienen entre sí (20) la razon duplicada de los lados BC, CA, AB: y si sobre los mismos lados se describieren sus quadrados, tambien estos tendrán entre sí la razon duplicada de los mismos lados sobredichos: luego los rectilíneos D, E, F tienen entre sí la misma razon que los quadrados; estos (47, 1) tienen tal razon, que el hecho sobre BC es igual á los otros dos: luego tambien el rectilíneo D es igual á los otros dos E y F.

PROP.

PROP. XXXII. no es menester.

PROP. XXXIII. Teorema.

En los círculos iguales los ángulos formados en el centro ó en la circunferencia, son entre sí como sus arcos, y lo mismo los sectores. (*fig.* 25.)

Explicacion. Los ángulos IGL, OHP están formados en el centro de círculos iguales; y los ángulos IML, ONP están en la circunferencia. Digo lo primero, que los ángulos G y H tienen entre sí la razon misma, que los arcos IL, OP; y asimismo los sectores IGL, OHP son como los mismos arcos.

Excuso esta demonstracion, por ser la misma que la primera de este libro; salvo que se ha de usar aquí de los arcos, como allá de las basas; y en lugar de citar la 38 del 1, se ha de citar la 29 del 3.

Digo lo segundo, que los ángulos M y N hechos en la circunferencia, tienen tambien entre sí la misma razon, que los arcos IL, OP en que insisten; porque dichos ángulos son mitades de los del centro: (20, 3) luego siendo estos como los arcos IL, OP, tambien lo serán aquellos.

APÉNDICE.

Concluye Euclídes el libro 6 *en la proposicion sobredicha: las tres siguientes son las últimas del* libro 3, *que de industria reservé para este lugar, por mayor facilidad de sus demonstraciones.*

PROP. XXXIV. Teorema.

Que es 35 del *libro* 3 de Euclídes.

Si dos cuerdas de un círculo se cortan, el rectángulo hecho de los segmentos de la una, es igual al rectángulo hecho de los segmentos de la otra. (*fig.* 26.)

Explicacion. Las cuerdas RS, VT se cortan de qualquiera manera en Q. Digo que el rectángulo hecho de RQ, QS es igual al rectángulo hecho de VQ, QT.

Pre-

Preparacion. Júntense las rectas RV, TS.

Demonstracion. Los triángulos RQV, TQS tienen los ángulos en Q iguales, por ser verticalmente opuestos; (15, 1) tambien los ángulos V y S son iguales, por insistir sobre la misma periferia RT: (21, 3) luego dichos triángulos RQV, TQS son equiángulos: luego sus lados (4) son proporcionales, como RQ á QV, así TQ á QS: luego (16) el rectángulo hecho de los extremos RQ, QS es igual al que se hiciere de los medios QV, QT.

PROP. XXXV. Teorema.

Que es 36 del *libro* 3 de Euclídes.

Si de un mismo punto puesto fuera del círculo se tiran al círculo dos líneas, una tangente y otra secante, será el quadrado de la tangente igual al rectángulo hecho de toda la secante y el segmento externo. (fig. 27.)

Explicacion. Del punto B puesto fuera del círculo, sale la recta BC que toca al círculo en C, y la BE que le corta en D. Digo que el quadrado de la tangente BC es igual al rectángulo comprehendido de toda la secante BE y el segmento externo BD.

Preparacion. Tírense las rectas DC, EC.

Demonstracion. Los triángulos BCD, BEC tienen el angulo B comun y los ángulos BCD y E iguales: (32, 3) luego son equiángulos, y tienen los lados proporcionales, (4) como BE lado mayor del triángulo BEC, con BC lado menor de dicho triángulo; así el mismo BC lado mayor del triángulo BCD, con BD lado menor del mismo: luego (17) el rectángulo hecho de las extremas BE, BD es igual al quadrado de la media BC.

PROP. XXXVI. Teorema.

Que es 37 del *libro* 3 de Euclídes.

Si el rectángulo hecho de la recta BE que corta al círculo, (fig. 27.) y del segmento BD, fuera igual al quadrado de la BC que cae en el círculo, esta línea será tangente.

Demonstracion. Porque el rectángulo hecho de BE, BD se supone igual al quadrado de BC, serán (17) proporciona-

na-

nales BE á BC, como BC á BD: luego BC será media proporcional. Esta media proporcional es única, de suerte, que ni puede ser otra mayor que BC, ni menor; porque en qualquier caso, su quadrado seria igual al rectángulo de las extremas BE, BD; y por consiguiente igual al quadrado de BC, lo que es absurdo, pues los quadrados de líneas desiguales no pueden ser iguales: luego la media proporcional entre BE y BD es única; y como (*por la anteced.*) la tangente tirada del punto B sea media proporcional entre BE y BD, se sigue ser BC dicha tangente.

LIBRO VII.

QUE ES ONCENO DE EUCLÍDES.

Trata en este libro 11 *Euclídes de los principios fundamentales de los sólidos. Omítense comunmente el* 7, 8, 9 *y* 10; *porque ademas de no ser muy necesaria su noticia, consta por experiencia, sacarse poco provecho de su estudio en los principios: y aunque este libro y el siguiente son, segun nuestro órden,* 7 *y* 8, *quando citaré sus proposiciones les nombraré undécimo y duodécimo, segun el órden que tienen en Euclídes.*

DEFINICIONES.

1 *SOlido ó cuerpo, es una quantidad, que consta de las tres dimensiones, longitud, latitud y profundidad.*

2 *Los términos del sólido son superficies.*

3 *Una recta es perpendicular á un plano, quando lo fuere á todas las rectas que pasan por el punto en que ella toca al plano.* Como la recta AB (*fig.* 1.) será perpendicular al plano DC si es perpendicular á las GH, FE, &c, que pasan por el punto B, en que la AB toca al plano; esto es, si los ángulos ABE, ABF, ABG, ABH, &c. fueren rectos.

Un

4 *Un plano, es perpendicular á otro, quando las rectas tiradas en el uno perpendiculares á la comun seccion, son tambien perpendiculares al otro.*

Explicacion. La seccion comun de dos planos, es la línea comun á entrambos: como (*fig.* 2.) la línea AB, que es comun á entrambos planos AG, DC: pues si la línea EF, que es perpendicular á la comun seccion AB, y está en el plano AG fuere perpendicular al plano DC, será el plano AG perpendicular á DC.

5 *Si la línea AB (fig. 3.) no fuere perpendicular al plano DC, y del punto superior A cae la AE perpendicular al plano DC, y se tira la EB, el ángulo agudo ABE será la inclinacion de la AB al plano CD.*

6 *La inclinacion de un plano á otro, es el ángulo agudo que forman las perpendiculares que de uno y otro plano se tiran á la comun seccion.* Como la inclinacion del plano LQ (*fig.* 4.) al plano HI es el ángulo agudo NMO que forman las rectas NM, MO perpendiculares á la comun seccion PQ, de las quales, la NM está en el plano de LQ, y la MO en el plano HI; y segun fuere este ángulo mayor ó menor, es mayor ó menor la inclinacion de los planos.

7 *Los planos tienen semejante inclinacion unos á otros, quando sus ángulos de inclinacion son iguales.*

8 *Planos paralelos, son aquellos, que prolongados por todas partes, siempre distan por qualquiera parte igualmente entre sí.*

9 *Sólidos semejantes, son los terminados de igual número de superficies semejantes.*

10 *Sólidos semejantes é iguales, son los terminados de igual número de superficies iguales y semejantes.*

11 *Angulo sólido, es la inclinacion de mas de dos rectas que concurren en un punto, y están en diversos planos.* Como (*fig.* 5.) la inclinacion de las líneas MN, ML, MP que concurren en un mismo punto M, y están en diferentes planos, forman un ángulo sólido M. Si los ángulos sólidos fueren iguales, penetrando el uno con el otro, se ajustarán, y si se ajustaren, serán iguales.

12 *Pirámide, es una figura sólida terminada de diver-*

sos

sos triángulos, que saliendo de los extremos de otro plano que sirve de basa, concurren en un punto, como MNLP. (*fig.* 2.)

Explicacion. La pirámide consta de cúspide, lados, basa y exe. La cúspide es M: la basa es el plano NPL: lados son las líneas NM, LM, PM, que concurren en la cúspide: y el exe es la MO tirada de la cúspide al medio de la basa. La pirámide puede ser en dos maneras, *recta*, é *inclinada*. *Recta*, es aquella cuyo exe es perpendicular á la basa. *Inclinada*, cuyo exe no es perpendicular á la basa.

13 *Prisma, es una figura sólida, que tiene por términos dos planos paralelos semejantes é iguales; y los otros paralelógramos.* Como (*fig.*6.) QV, cuyos dos planos PQR, STV son paralelos, y triángulos semejantes é iguales, y podian ser otros qualesquiera rectilíneos: pero los otros planos RT, RS, &c. son paralelógramos.

14 *Esfera, es una figura sólida terminada de una sola superficie, que tiene un punto en medio, y quantas líneas salen de dicho punto y se terminan en la superficie, son iguales.* Otros la definen diciendo, *ser un sólido formado de la revolucion entera de un semicírculo al rededor de su diámetro.*

15 *Exe de la esfera, es el diámetro fixo, al rededor del qual se mueve y hace su revolucion el semicírculo.* Las extremidades del exe se llaman *polos*.

16 *Centro de la esfera, es el mismo que el del semicírculo que describe la esfera.*

17 *Diámetro de la esfera, es qualquiera recta, que pasando por el centro, se terminan sus extremos en la superficie.*

18 *Pirámide cónica*, (*en Latin* conus) *es la que tiene por basa un círculo, y fenece en un punto alto, que es el vértice. Su exe es la recta del vértice al centro de la basa: su lado es la recta del vértice á la circunferencia de la basa.* Si el *exe* es perpendicular á la basa, se llama esta pirámide *recta*; si no es perpendicular, es *oblíqüa* ó *inclinada*.

19 *Cilindro, es un sólido, cuyos dos planos opuestos son dos círculos iguales y paralelos. Basas* del cilindro, los dos círculos sobredichos: su *exe* es la recta, que jun-

junta los centros de las basas: su lado es la recta que pasa de una circunferencia á otra. Si el *exe* es perpendicular á las dos basas, el cilindro es *recto*; si no, *obliqüo* ó *inclinado*.

20 *Cilindros y pirámides cónicas semejantes, (siendo rectas) son las que tienen los exes y diámetros de las basas proporcionales*; pero siendo obliqüos, ademas de lo dicho, han de tener los exes igualmente inclinados á sus basas.

21 *Paralelepípedo, es un sólido que consta de seis planos paralelógramos, que cada dos opuestos son iguales y paralelos.*

22 *Cubo, es un sólido que consta de seis planos quadrados*, como una piedra por todas partes quadrada: y generalmente el sólido, que consta de muchas superficies, se llama *polihedro*.

PROP. I. Teorema.

Una línea recta no puede tener una parte suya en un plano, y otra en otro.

Es por sí mismo manifiesto; porque si hubiese parte en un plano, y parte en otro, serian dos líneas que forman ángulo; y por consiguiente no seria línea recta, contra lo supuesto.

PROP. II. Teorema.

Todas las partes de un triángulo están en un mismo plano, como tambien qualesquiera dos rectas que se cortan.

Tambien es patente por sí; porque el triángulo es una superficie llana, cerrada con tres líneas rectas; y si una parte suya estuviese en un plano, y otra en otro, se falsificaria la proposicion antecedente: y por la misma razon las dos rectas que se cortan, han de estar entrambas en un mismo plano.

PROP. III. Teorema.

Si dos planos AB, CD se cortan, su comun seccion EF es una línea recta. (*fig.* 7.)

Demonstracion. Si la seccion comun EF no es una línea recta, sean dos la EHF en el plano CD, y la EGF en el plano AB: estas concurren necesariamente en E y F donde se cortan los lados de los planos: luego dos rectas cierran espacio, contra el *axíoma* 12, 1.

PROP.

PROP. IV. Teorema.

La línea que es perpendicular á dos rectas que se cortan, es tambien perpendicular al plano en que están. (*fig.* 8).

Explicacion. La recta DC es perpendicular á las dos rectas GC, BC que se cortan en C. Digo ser tambien perpendicular al plano AO en que están dichas líneas.

Preparacion. Supongo que *del punto D superior al plano, no puede caer mas que una perpendicular* DC; porque tirada qualquiera otra DH, y juntando la HC, será HCD un triángulo, y por consiguiente un plano; (2) y suponiéndose el ángulo C recto, será H agudo: (32, 1) luego sola DC puede ser perpendicular. Asimismo *del punto C solo puede salir una perpendicular al plano*; porque si se tira otra qualquiera CR, y se quiere que entrambas sean perpendiculares al plano, entrambas serán (*def.* 3) perpendiculares á GI: luego los ángulos DCI, RCI son rectos é iguales, el todo á su parte, lo que es imposible. Aunque esto lo demuestra Euclídes en la *proposicion* 13, lo he anticipado para mayor facilidad.

Demonstracion. Supuesto lo dicho, pruebo que la DC perpendicular á las dos GC, BC es perpendicular al plano; porque en el punto C la perpendicular al plano es única; esta ha de ser (*def.* 3) perpendicular á las BC, GC: luego si DC es perpendicular á BC, CG es tambien perpendicular al plano en que ellas se hallan.

PROP. V. Teorema.

Si una línea es perpendicular á otras tres, en el mismo punto en que se cortan, estarán las tres en un mismo plano. (*fig.* 9.)

Explicacion. La RA se supone ser perpendicular á las tres AI, AG, AF. Digo que estas tres están en un mismo plano HF.

Preparacion. Si no fuere así, alguna estará en otro plano; sea pues AI la que se halle en el plano RO, y no en HF.

Demonstracion. Por ser RA perpendicular á las dos AG, AF, será perpendicular (4) al plano HF: luego (*def.* 3) es perpendicular á AO, que por ser comun seccion de los dos pla-

planos, está en el plano HF; y como la misma RA se suponga perpendicular á AI, serán los ángulos RAO, RAI rectos iguales, el todo á su parte, que es absurdo: luego la AI está en el plano HF donde están las demas.

PROP. VI. Teorema.

Las rectas LM, NO perpendiculares á un mismo plano, son entre sí paralelas. (*fig.* 10.)

Preparacion. Júntese MO, y considérese, que el plano MN perpendicular á TS pasa por la NO, y que del punto M en dicho plano sale la MP perpendicular á la comun seccion MO.

Demonstracion. Por ser MP perpendicular á la comun seccion MO, es (29, 1) paralela á ON, y (*def.* 4) perpendicular al plano TS: y como (*por lo demonstrado en la prepar. á la prop.* 4) solo pueda salir del punto M una perpendicular al plano TS, será MP la misma ML que se suponia perpendicular á dicho plano; siendo pues PM paralela á NO, tambien lo será LM.

PROP. VII. Teorema.

La línea PS (*fig.* 11.) *que junta los dos puntos PS de las paralelas PQ, RS, está con ellas en un mismo plano.*

Demonstracion. Si la PS no está en el mismo plano que las paralelas, tírese la otra PTS que esté en el mismo plano; y si esta coincide con PS, estará esta en el mismo plano que las paralelas: y si no coincide, luego las dos rectas PTS, PS comprehenderán espacio (*contra el* axîoma 12 *del* libro 1.)

PROP. VIII. Teorema.

Si de dos paralelas la una es perpendicular á un plano, tambien lo será la otra.

Consta esta proposicion de lo demonstrado en la 6.

PROP. IX. Teorema.

Las líneas paralelas á una misma, son paralelas entre sí, aunque no estén en un mismo plano. (*fig.* 12.)

Explicacion. Las líneas AB, CD son paralelas á la línea

nea EF. Digo que son tambien paralelas entre sí, aunque no estén las tres en un mismo plano.

Preparacion. Tírese en el plano de las líneas EF, AB, la HG perpendicular á AB, que (29, 1) tambien lo será á EF: y en el plano de las líneas EF, CD, tírese la HI perpendicular á EF, que asimismo lo será á CD.

Demonstr. Siendo la línea EH perpendicular á las HG, HI, lo será á su plano; (4) y por la precedente, las líneas AG, CI, que se suponen paralelas á EH, tambien serán perpendiculares al mismo plano: luego (6) serán paralelas entre sí.

PROP. X. Teorema.

Si dos rectas que concurren en un plano, son paralelas á dos que concurren en otro, formarán ángulos iguales. (fig. 13.)

Explicacion. Si HG es paralela á ML, y HI á MO, aunque en diversos planos, los ángulos GHI, LMO serán iguales.

Preparacion. Háganse las líneas GH, ML, HI, MO iguales, y tírense las líneas GL, HM, IO, GI, LO.

Demonstracion. Por ser HG, ML paralelas é iguales, serán (33, 1) GL, HM paralelas é iguales; y asimismo lo serán IO, HM; y (9) las GL, IO tambien serán paralelas iguales: luego las GI, LO son tambien iguales y paralelas. Con que los triángulos GHI, LMO tienen los tres lados del uno iguales á los tres del otro: luego (8, 1) los ángulos GHI, LMO son iguales.

PROP. XI. Problema.

Tirar una perpendicular al plano AB de un punto I dado fuera del plano. (fig. 14.)

Operacion. Tírese en el plano AB qualquiera recta LN: tírese del punto I la IM perpendicular á LM; (12, 1) y de M la perpendicular MP, (11, 1) y á esta tírese del punto I la perpendicular IP. Digo que IP será perpendicular al plano AB.

Preparacion. Tírese OP paralela á LM. (31, 1)

De-

Demonstracion. Por ser la LM perpendicular á las líneas IM, MP, será (4) perpendicular al plano IMP; y habiéndose tirado OP paralela á LM, será (8) tambien perpendicular al mismo plano: luego será perpendicular á IP; siendo pues IP perpendicular á las líneas MP, PO, será (4) perpendicular al plano AB.

PROP. XII. Problema.

Levantar una perpendicular á un plano de un punto dado en él. (fig. 15.)

Pídese, que del punto C dado en el plano AB se levante una perpendicular.

Operacion. Tómese qualquiera punto E fuera del plano, y tírese de él la perpendicular ED: (11) y del punto C la CF paralela á ED; (31) y esta será la perpendicular que se pide. Consta de la *proposicion* 8.

PROP. XIII. Teorema.

De un mismo punto puesto en el plano ó fuera de él, no se puede tirar mas que una perpendicular al plano.

Queda demonstrada en la *preparacion* de la *propos.* 4.

PROP. XIV. Teorema.

Los planos, á los quales una misma línea es perpendicular, son paralelos entre sí. (fig. 16.)

Explicacion. La línea IK es perpendicular á los dos planos LO, MN. Digo que estos planos serán paralelos.

Preparacion. Tírese la HG paralela á IK; y júntense las HI, GK.

Demonstracion. Por ser HG, IK paralelas, y una de ellas IK perpendicular á entrambos planos, será tambien la otra HG (8) perpendicular á los mismos planos: luego (*def.* 3) los ángulos H, I, G, K serán rectos, y las HI, GK paralelas, y IG paralelógramo; y por consiguiente (34, 1) los lados HG, IK iguales. Lo mismo probaré tirando otra qualquiera paralela: luego los planos son por todas partes equidistantes ó paralelos.

PROP.

PROP. XV. Teorema.

Si dos líneas que concurren en un plano, son paralelas á otras dos que concurren en otro, dichos planos serán paralelos. (*fig.* 17.)

Explicacion. Las rectas RL, RM concurren en R, y son paralelas á las rectas NP, PO, que en diferente plano concurren en P. Digo que los planos LM, NO son paralelos.

Preparacion. (11) Del punto R tírese una perpendicular RS al plano NO; y por el punto S háganse las ST, SQ paralelas á PN, PO.

Demonstracion. Por ser RL, ST paralelas á PN, son (9) paralelas entre sí: luego (27, 1) los ángulos LRS, RST son iguales á dos rectos; y siendo RST recto por construccion, será el ángulo LRS recto. De la misma manera demonstraré ser recto el ángulo MRS: luego la SR es perpendicular á las dos RL, RM: luego (4) es perpendicular al plano LM; y siendo tambien perpendicular al plano NO, serán (14) los planos LM, NO paralelos.

PROP. XVI. Teorema.

Si á dos planos paralelos les cortare otro, las comunes secciones serán paralelas. (*fig.* 18.)

Explicacion. El plano XQ corta los planos paralelos TR, PY. Digo que las comunes secciones VQ, XS son paralelas.

Demonstracion. Si no son paralelas, concurrirán en algun punto Z: y como ellas estén en los planos, tambien estos concurrirán si se continúan en Z: luego no son paralelos, contra lo supuesto: luego las comunes secciones VQ, XS no concurren: luego son paralelas.

PROP. XVII. Teorema.

Si á dos rectas las cortan planos paralelos, las cortarán proporcionalmente. (*fig.* 19.)

Explicacion. Si las rectas BA, DC se cortan con los planos paralelos H, I, M. Digo que se cortarán proporcionalmente AE á EB, como CF á FD.

Preparacion. Tírese la recta AD, y las AC, EF y BD.

De-

Demonstr. Porque el plano del triángulo ABD corta los tres planos paralelos, las rectas BD, EF serán paralelas, (16) y por la misma razon lo serán AC, EF: luego (2, 6) será AE á EB, como AG á GD; y asimismo CF á FD, como la misma AG á GD: luego (11, 5) será AE á EB, como CF á FD.

PROP. XVIII. Teorema.

Si una recta es perpendicular á un plano, todos los planos en que dicha recta se hallare, serán perpendiculares al mismo plano. (*fig.* 20.)

Explicacion. Sea la AB perpendicular al plano LI. Digo que todos los planos en que se hallare, serán perpendiculares al plano LI.

Preparacion. Hállese por exémplo en el plano GA, que corte al plano LI en GH: tírese la EF perpendicular á la comun seccion GH. (11, 1)

Demonstr. Porque los ángulos ABF, EFB son rectos, las AB, EF son paralelas: (29, 1) luego (8) EF será perpendicular al plano LI: luego (*def.* 4) el plano GA es perpendicular al plano LI. Lo mismo se demonstrará de qualquier otro plano que pasare por la perpendicular AB.

PROP. XIX. Teorema.

Si dos planos que se cortan, son perpendiculares á otro, tambien su comun seccion será perpendicular al mismo plano. (*fig.* 21.)

Explicacion. Los planos VP, SO se cortan en LM, y entrambos son perpendiculares al plano QR. Digo que la comun seccion LM será tambien perpendicular al plano QR.

Demonstracion. Del punto M puede levantarse una perpendicular al plano QR que esté en el plano SO: tambien del mismo punto M se puede levantar una perpendicular al mismo plano QR que esté en el plano VP: luego como (13) del punto M solo se pueda levantar una perpendicular, esa misma estará en el plano SO y en el plano VP: luego será la comun seccion ML: luego esta es perpendicular al plano QR.

PROP.

PROP. XX. Teorema.

Si un ángulo sólido está compuesto de tres ángulos planos, dos de aquellos juntos, qualesquiera que sean, son mayores que el tercero. (fig. 22.)

Explicacion. Los tres ángulos planos PXQ, PXS, QXS forman el ángulo sólido X (que se debe considerar relevado como cúspide de pirámide.) Digo que qualesquiera dos de los ángulos planos QXP, PXS son mayores que el tercero QXS.

Preparacion. Hágase qualquiera triángulo ABD; y tirando la BC como se quiera, tírense las AC, CD.

Demonstracion. Para que los dos triángulos ABC, CBD formen un ángulo sólido con el triángulo ABD, es menester que el punto C esté elevado sobre el plano ABD: luego toda la BC está elevada sobre dicho plano, ménos el extremo B: luego el punto I tambien está elevado sobre AD: luego (20, 1) las AI, ID serán mayores que AD: luego toda la compuesta de AI, ID es mayor que AD: luego (25, 1) el agregado de los ángulos ABC, CBD es mayor que el ángulo ABD: luego para poderse formar un ángulo sólido de los ángulos QXP, PXS, QXS es forzoso sean los dos primeros mayores que el otro.

PROP. XXI. Teorema.

Todos los ángulos planos que componen un ángulo sólido, son menores que quatro rectos. (fig. 22.)

Demonstracion. Si los ángulos planos X fueren iguales á quatro rectos, juntos formarian un espacio plano equivalente á un círculo, que es quatro rectos: luego no comprehenderá espacio sólido; pero si los ángulos X juntos son menores que quatro rectos puestos en plano como en M, dexarán vacio el espacio PXZ; y si se juntan XP, XZ se relevará el punto X, y quedará formado el ángulo sólido X.

PROP. XXII. y XXIII. no son esenciales.

PROP. XXIV. Teorema.

Si muchos planos paralelos comprehenden un sólido paralelepípedo, los planos opuestos son paralelógramos iguales y semejantes. (*fig.* 23.)

Explicacion. Sea el sólido AB terminado de planos paralelos. Digo que los planos opuestos son paralelógramos semejantes é iguales.

Demonstracion. Pruebo primeramente, que son paralelógramos; porque el plano FE corta los dos paralelos CA, BE, las comunes secciones FA, DE serán paralelas; (16) y asimismo probaré ser paralelas FD y AE: luego AD es un paralelógramo, (*def.* 36, 1) y por la misma razon lo serán AG, FB y los demas.

Segundo: Pruebo que los opuestos son semejantes é iguales; porque siendo las líneas AE, EG paralelas á FD, DB é iguales, cada una á su correspondiente, los ángulos AEG, FDB serán iguales. (10) Por el mismo camino se demonstrará, que los lados y ángulos opuestos en los otros paralelógramos son iguales: luego los paralelógramos opuestos son iguales y semejantes.

PROP. XXV. Teorema.

Si un paralelepípedo AB (*fig.* 24.) *se divide con un plano CD paralelo á los lados opuestos EA, BF, serán los segmentos sólidos proporcionales con sus basas; esto es, el segmento AC al segmento DB, como la basa AG á la basa DH.*

Demuéstrase como la *prop.* 1 del *lib.* 6; porque si la basa AG cabe dos veces, por exemplo, en la basa DH, tambien el sólido AC cabrá dos veces en el sólido DB: luego tienen dichos segmentos sólidos la razon misma de sus basas.

Lo mismo se convence por la misma razon en todos los prismas.

COROLARIOS.

1 *El sólido AC al sólido DB, es como el lado AD al lado DF; porque AC á DB, es como la basa AG á la basa DH; la basa AG á DH,* (1, 6) *es como AD á DF: luego AC á DB, es como AD á DF. De que se sigue, que tambien componiendo, será AB con AC, como AF con AD, &c.*

La

2 *La seccion paralela á los planos opuestos en qualquiera prisma, es igual y semejante á los planos opuestos.*

PROP. XXVI. y XXVII. no son menester.

PROP. XXVIII. Teorema.

Si un paralelepípedo se divide con un plano que pase por las diagonales de los planos opuestos, quedará dividido en dos prismas iguales. (*fig.* 23.)

Explicacion. Sea el paralelepípedo AB. Digo que si se divide por las diagonales DA, BH de los planos opuestos, quedará dividido en dos prismas iguales.

Demonstr. Por ser AG paralelógramo, las líneas GE, HA son paralelas é iguales; (24, 1) y asimismo son BD, GE paralelas é iguales: luego HA y BD iguales y paralelas á una misma GE, son entre sí iguales y paralelas: (9) luego las DA, BH que las juntan, son tambien paralelas é iguales: (33, 1) luego AB es paralelógramo; y como los paralelógramos FE, CG sean cortados por las DA, BH en dos triángulos iguales, (34, 1) los dos prismas FBA, EBA tendrán los triángulos y los paralelógramos de que se componen, iguales cada uno á su correspondiente: (*def.* 21) luego dichos prismas son iguales.

PROP. XXIX. y XXX. Teoremas.

Los paralelepípedos que tienen una misma basa y altura son iguales.

Dos casos comprehende este Teorema. El primero: (*fig.* 25.) Imagínense los paralelepípedos ISPN, ILQN constituidos sobre una misma basa IKON; y de una misma altura, ó entre los mismos planos paralelos IO, TQ, y que entrambos estén incluidos entre unos mismos planos laterales opuestos IR, KQ. Digo que serán iguales.

Demonstracion. Los triángulos SKL, POQ, TIM, VNR son totalmente iguales; (24 *de este*, y 8, 1) como tambien el paralelógramo IL á su opuesto NQ; y IS á NP; (24) y asimismo son iguales SM, PR: (36, 1) luego los prismas SIL, PNQ están terminados de igual número de superficies iguales y semejantes: luego (*def.* 10) son iguales: luego si á cada uno se añade el sólido comun

 ILPN,

ILPN, los todos que resultan; esto es, los paralelepípedos ISPN, ILQN serán iguales.

El segundo caso (que demuestra Euclídes en la *propos.* 30) es, quando los paralelepípedos de que hablamos, no se incluyen entre unos mismos planos laterales opuestos: como en la *fig.* 26. los paralelepipedos ISPN, IZXN tienen la misma basa IKON, y tienen una misma altura, como los antecedentes; pero los planos laterales XZKO, ITVN en que se incluyen, no son paralelos. Digo pues, que en este caso tambien son iguales.

Demonstr. Supuesto que el plano ZHYX es paralelo á la basa IKON, prolongadas las XY, ZH, cortarán á TR en M y R, y á SP en L y Q: y juntando las KL, IN, OQ, NR, quedará formado el sólido IQLN, cuyos planos opuestos se probará fácilmente de lo dicho ser paralelos é iguales: luego dicho sólido es paralelepípedo.[a] Esto supuesto, (*por la primera parte*) el paralelepípedo IKZHXONY es igual al paralelepípedo ILQN; este es por la misma razon igual al ISPN: luego el paralelepípedo IKZHXONY es igual al ISPN.

PROP. XXXI. Teorema.

Los paralelepípedos que tienen las basas y alturas iguales, son iguales.

Consta de la antecedente, pues lo mismo es tener una misma basa y altura, que tenerlas diferentes, pero iguales; porque los paralelepípedos que tienen una misma basa y altura, si se consideran separados, las tendrán iguales; y los que separados tienen igual basa y altura, si se consideran juntos sobre la misma basa, tendrán tambien una misma altura, y por la antecedente serán iguales.

PROP. XXXII. Teorema.

Los paralelepípedos de una misma altura tienen la misma razon que sus basas. (*fig.* 24.)

Consta de la *prop.* 25, donde se demonstró, que los sólidos parciales AC, DB en que se dividió el paralelepípedo AB, tienen entre sí la razon de las basas AG, DH; estos sólidos tienen una misma altura y son paralelepípedos, por ser los lados por suposicion paralelos é iguales:

les: luego los paralelepípedos de una misma ó igual altura, tienen la razon misma de sus basas.

COROLARIOS.

1 *Los paralelepípedos de una misma ó igual basa, son como sus alturas. Aunque se infiere de lo dicho, lo demuestro así. Sean los paralelepípedos GA, ZR, (fig. 27.) cuyas basas CA, TR sean iguales; pero la altura AE sea, por exemplo, doblada de RX. Digo que el paralelepípedo GA es doblado de ZR.*

2 *Considérense las basas en un mismo plano CR, y que el plano PX paralelo á las basas corte el paralelepípedo mayor en PN, y quedará dividido el paralelepípedo GA en dos PA, GN. Esto supuesto, por tener los paralelepípedos ZR, PA iguales basas y alturas, son iguales: luego (7, 5) la misma razon hay de GA á PA, que del mismo GA á ZR: GA á PA,* (corol. 1, 25) *es como AE á AN: luego GA á ZR, es como la altura AE á AN ó XR su igual.*

PROP. XXXIII. Teorema.

Los paralelepípedos semejantes tienen razon triplicada de la de sus lados homólogos. (fig. 28.)

Explicacion. Sean los paralelepípedos AH, RC semejantes. Digo que tienen entre sí razon triplicada de la que tienen sus lados homólogos GB, BF.

Preparacion. Siendo dichos sólidos semejantes, los planos que les terminan serán semejantes, (*def.* 9) y por la *defin.* 1 del 6 dichos planos serán equiángulos: de que se sigue, que los paralelepípedos AH, RC se podrán colocar de género, que los ángulos iguales DBA, CBE sean opuestos: con que por las 14 *y* 15 del *lib.* 1 harán AB, BC una línea recta, como tambien DB, BE: y asimismo por ser iguales los ángulos ABF, GBC, harán las líneas FB, BG una recta: y como los planos así dispuestos sean semejantes, los lados que comprehenden dichos ángulos iguales, serán proporcionales GB á BF, como EB á BD, y EB á BD, como CB á BA. Perficiónense últimamente los paralelepípedos BM, CH, como se vé en la figura.

Demonstracion. Porque los paralelepípedos RC, BM tie-

tienen una misma altura BC, serán (*corol*. 1, 25) RC á BM, como GB á BF: y por la misma razon el paralelepípedo BM al paralelepípedo CH, es como EB á BD; y asimismo el paralelepípedo CH al paralelepípedo AH, es como CB á BA: siendo una misma razon la que hay de GB á BF, que de EB á BD, y de CB á BA, los sólidos siguientes tendrán una misma razon, y serán continuos proporcionales:

RC. BM. CH. HA.

Luego (*def*. 14, 5) el paralelepípedo RC al paralelepípedo HA tiene razon triplicada de la que tiene el paralelepípedo RC con el BM: estos tienen la razon de GB á BF: luego los paralelepípedos RC, HA tienen razon triplicada de GB á BF, que son lados homólogos.

COROLARIO.

Si hubiere quatro líneas continuas proporcionales, el paralelepípedo hecho sobre la primera, á otro paralelepípedo semejante hecho semejantemente sobre la segunda, tendrá la misma razon que hay de la primera á la quarta: porque la primera á la quarta tiene razon triplicada de la primera á la segunda; los paralelepípedos de la primera y segunda tienen tambien razon triplicada de la primera y segunda, que son sus lados: luego tienen la misma razon que la tercera á la quarta. Aquí se vé, que toda la dificultad del Problema Deliaco de la duplicacion del cubo, consiste en hallar dos medias proporcionales entre dos líneas dadas.

PROP. XXXIV. Teorema.

Los paralelepípedos iguales tienen las basas y alturas recíprocas; y los que tienen las basas y alturas recíprocas, son iguales. (*fig*. 29.)

Explicacion. Los paralelepípedos LQ, IZ se suponen iguales. Digo lo primero, que tienen sus basas y alturas recíprocas; esto es, la basa IT á la basa LM, es como la altura MQ á la altura TZ.

Preparacion. Tómese MP igual á TZ: y por P hágase el plano PN paralelo á la basa ML.

Demonstracion. Por ser los paralelepípedos IZ, LQ iguales, IZ á LP (7, 5) tendrá la misma razon que LQ á LP, IZ á LP tiene la razon de la basa IT á la basa LM,

(32) y LQ á LP tiene la razon de la altura MQ á la altura MP; (*corol.* 1, 32) luego la misma razon hay de la basa IT á la basa LM, que de la altura MQ á la altura MP ó TZ su igual, que es tener razon recíproca.

Digo lo segundo, que si las basas de los paralelepípedos tienen razon recíproca con sus alturas, son ellos iguales.

Demonstracion. El sólido IZ al sólido LP, es (32) como la basa IT á la basa LM. El sólido LQ al sólido LP, es como MQ á MP ó TZ su igual; luego si es recíprocamente IT á LM, como MQ á MP ó TZ, la misma razon tendrá el paralelepípedo IZ con el sólido LP, que el paralelepípedo LQ con el mismo sólido LP; luego (9, 5) los paralelepípedos IZ, LQ son iguales.

COROLARIO.

Lo que se ha demonstrado de los paralelepídos en las propos. 29, 30, 31, 32, 33 y 34, *conviene tambien á los prismas triangulares, por ser* (28) *la mitad de los paralelepípedos; y á todos los prismas polígonos, por resolverse en prismas triangulares.*

1 *Los prismas de una misma altura tienen la razon misma de sus basas; y si tienen una misma basa, tienen la razon de las alturas.*

2 *Si fueren semejantes, estarán en razon triplicada de la razon de sus lados homólogos, que son los opuestos á ángulos iguales.*

3 *Si fueren iguales, tendrán las basas y alturas recíprocas; y si tienen las basas y alturas recíprocas, serán iguales.*

PROP. XXXV. no es menester.

PROP. XXXVI. Teorema.

Si hay tres líneas proporcionales, el paralelepípedo hecho de las tres, será igual al paralelepípedo equiángulo, que tiene todos sus lados iguales á la de en medio. (*fig.* 30.)

Explicacion. Sean las líneas A, B, C tres continuas proporcionales, de las quales sea formado el paralelepípedo DE; esto es, la DF sea igual á la línea A, la GE á la B, y FG á la C; haya otro paralelepípedo HI, cuyos tres lados HK, KL, LI, y por consiguiente todos los demas sean iguales

á

á la media proporcional B ; y sean entrambos equiángulos. Digo que serán iguales.

Demonstracion. Supongo para mayor claridad, que son rectángulos ; pues por ser los paralelógramos DG, HL equiángulos, y ser DF igual á A, FG á C, y KH, como tambien KL igual á la media B, será DF á KH, como KL á FG, que es ser los lados recíprocos : luego las basas DG, HL (14, 6) son iguales : tambien, por ser las alturas GE, LI iguales á la misma B, serán iguales entre sí : luego los paralelepípedos DE, HI tienen las basas y alturas iguales: luego (31) son iguales.

Si los paralelepípedos fuesen inclinados, siempre las perpendiculares á las basas serian iguales, por suponerse equiángulos, y seria la misma demonstracion : lo mismo se convence de los prismas triláteros, por ser la mitad de los paralelepípedos de igual basa y altura. (28)

PROP. XXXVII. Teorema.

Si quatro líneas son proporcionales, los paralelepípedos semejantes descritos semejantemente de estas líneas, serán proporcionales ; y si los paralelepípedos semejantes son proporcionales, tambien lo serán las líneas. (fig. 31.)

Sean quatro proporcionales M á N, como O á P. Digo que el sólido M al sólido N, será como el sólido O al sólido P.

Demonstr. El sólido M al sólido N tiene (33) razon triplicada de la que hay de la línea M á la línea N ; M á N es como O á P : luego el sólido M al sólido N tiene razon triplicada de la que hay de O á P. Esta misma razon triplicada de O á P, tiene el sólido O al sólido P : luego el sólido M al sólido N, es como el sólido O al sólido P.

Tambien si el sólido M al sólido N tiene la misma razon, que el sólido O al sólido P, como las líneas M, N tengan razon subtriplicada de sus sólidos, y las O, P de los suyos, la misma razon habrá de la línea M á N, que de la línea O á P.

PROP. XXXVIII. y XXXIX. no son esenciales.

PROP.

PROP. XL. Teorema.

Si dos prismas triangulares tienen igual altura, y el uno tiene por basa un paralelógramo duplo de la basa del otro, que se supone ser triangular, los prismas serán iguales. (fig. 32.)

Explicacion. Sean los prismas HM, PR ambos triangulares y de igual altura; pero HM tenga la basa VX paralelógrama y dupla de la basa QOP triangular del otro. Digo ser estos prismas iguales.

Preparacion. Supónganse perficionados los paralelepípedos OS, XN.

Demonstracion. Por ser la basa VX dupla del triángulo QOP, y ser tambien el paralelógramo OT duplo del mismo triángulo, (34, 1) serán los paralelógramos OT, VX iguales; y como se suponga tener los prismas iguales alturas, tendrán los paralelepípedos OS, XN basas y alturas iguales: luego (31) son iguales: luego los prismas HM, PR que son sus mitades, (28) tambien serán iguales.

LIBRO VIII.

QUE ES EL DUODÉCIMO DE EUCLÍDES.

La doctrina de este libro es importantísima para aquella parte de Geometría Práctica, llamada Estereometría, que enseña la mensuracion de los sólidos. Demonstraré sus proposiciones por el camino mas llano y breve, evitando la prolixidad de Euclídes, que suele servir de tropiezo á los principiantes.

DEFINICIONES.

1 *Polígono inscrito en el círculo, es el que se describe dentro del círculo de tal suerte, que todos sus ángulos tocan en el círculo.*

2 *Polígono circunscrito al círculo, es el que de tal suerte está descrito al rededor del círculo, que todos sus lados tocan en la periferia.*

Só-

3 *Sólido ó Polihedro inscrito en la esfera, es el que puesto dentro de ella, todos sus ángulos sólidos tocan en la superficie esférica.*

4 *Sólido ó Polihedro circunscrito á la esfera, es aquel cuyas superficies tocan todas á la esfera.*

5 *Las quantidades ó figuras inscritas en otra, ó circunscritas á ella, se dice degeneran, fenecen ó se terminan en ella, quando tanto se puede aumentar la inscrita, ó disminuir la circunscrita, que la diferencia entre ellas y aquella en quien se inscriben ó circunscriben, sea menor que otra qualquiera quantidad dada ó dable.*

Esto se verá con mayor claridad en el *lema* para la *prop.* 2.

PROP. I. Teorema.

Los polígonos semejantes inscritos en los círculos, tienen la razon duplicada de la de sus diámetros. (*fig.* 1.)

Explicacion. Sean los polígonos semejantes inscritos en los círculos ABOF, ILRC. Digo tienen entre sí la razon duplicada de la de los diámetros AF, IC.

Preparacion. Tírense las rectas AO, BF, IR, LC.

Demonstr. Por ser los polígonos semejantes, los ángulos ABO, ILR serán iguales, y los lados OB, BA proporcionales con los lados LR, LI: (*def.* 1, 6) luego los triángulos OBA, RIL son equiángulos: luego los ángulos BOA, LRI son iguales: el ángulo BFA es igual al ángulo BOA, por insistir en el mismo arco BA; (21, 3) y el ángulo LCI es igual al ángulo LRI por la misma razon: luego los ángulos BFA, LCI son entre sí iguales. Esto supuesto, los triángulos FBA, CLI tienen los ángulos BFA, LCI iguales; y los ángulos FBA, CLI rectos é iguales, por estar en el semicírculo: (31, 3) luego los triángulos FBA, CLI son equiángulos y semejantes: (4, 6) luego la misma razon hay de BA á LI, que de AF á IC. Los polígonos ABOF, ILRC tienen, por ser semejantes, razon duplicada de la de los lados BA, LI: (22, 6) luego tienen tambien razon duplicada de la de los diámetros AF, IC.

COROLARIO.

De lo dicho se infiere, que los ámbitos de los polígonos inscritos en los círculos, tienen entre sí la razon misma de *de sus diámetros; esto es, que si por exemplo el diámetro del uno es doblado del diámetro del otro, el ambito de aquel será doblado del ámbito de este; porque, como se ha demonstrado, AB es á LI, como AF á IC; y asimismo se demonstrará ser tambien BO á LR, como AF á IC, y así de los demas: luego (12, 5) todos los lados juntos de un polígono, á todos los del otro juntos; esto es, el ámbito al ámbito, será como AF á IC.*

LEMA I. para la Prop. II.

Si de una quantidad CE (fig. 2.) se quita mas que su mitad; y del residuo se quita otra vez mas que su mitad, y así continuamente, vendrá á quedar una quantidad menor, que otra qualquiera quantidad B dada, por pequeña que sea.

Preparacion. Multiplíquese la quantidad B, hasta que haga una quantidad que exceda á la CE: y supongamos, que tomada B tres veces en GH, HI, IL, haga la quantidad GL mayor que CE.

Demonstracion. Si de GL tripla de B, se quita B ó GH su igual, es cierto se quita ménos que su mitad; y por consiguiente quedará HL mayor que su mitad: luego si de CE menor que GL, quitamos CD mayor que su mitad, quedará DE menor que HL; esto es, menor que el duplo de B: luego si de HL mayor, se quita su mitad HI ó B su igual; y de DE menor, se quita DF mas que su mitad, quedará FE menor que IL, ó menor que B su igual.

Esta proposicion es la primera del *lib.* 10 de Euclídes.

LEMA II.

Los polígonos inscritos en el círculo, degeneran en el círculo. (fig. 3.)

Demonstracion. Sea el quadrado ACBD inscrito en el círculo. Este es la mitad del quadrado VO circunscrito; porque VO se compone de quatro quadrados iguales al ZO; y el inscrito se compone de quatro triángulos iguales al AZD, que (34, 1) son mitades de aquellos quadrados: siendo pues el círculo menor que el quadrado VO, será el quadrado ACBD inscrito, mayor que la mitad del círculo: luego si este quadrado se quita del círculo, se le quita mas que su mitad.

Tambien partiendo los arcos por medio en E, K, I, H, que-

quedará inscrito un octógono; y tirada por E la tangente GF, y alargados los lados DA, BC, quedará formado el paralelógramo CF, cuya mitad es (41, 1) el triángulo CEA: y siendo el segmento CEA menor que el paralelógramo CF, será el triángulo CEA mas que la mitad del segmento: luego si dicho triángulo se quita del segmento, el residuo será menor que su mitad. Asimismo los demas triángulos CHB, BID, &c. son mas de la mitad de sus segmentos: luego si de los segmentos del círculo que quedaron quitado el quadrado, se quitan dichos triángulos, se quitará mas que la mitad del residuo. Lo mismo sucederá inscribiendo siempre polígonos de doblado número de lados: luego siempre se quitará del residuo del círculo mas que su mitad: luego (*lema* 1) se llegará á término en que lo que sobrare del círculo será ménos que qualquiera quantidad dada ó dable: luego (*def.* 5) los polígonos inscritos degeneran en el círculo.

PORISMA Ó TEOREMA UNIVERSAL.

Si las quantidades inscritas degeneran en aquellas en que se inscriben, estas tendrán entre sí la misma razon que las inscritas. (*fig.* 4.)

Los polígonos inscritos en los círculos A y B degeneran en ellos. Digo que el círculo A al círculo B tiene la misma razon que qualquiera polígono inscrito en A, como por exemplo, el de 12 lados tiene á otro semejante de 12 lados inscrito en B.

Preparacion. Si esto no fuere así, supongamos tenga el círculo A mayor razon al círculo B, que tiene el polígono de 12 lados inscrito en A, al inscrito en B: luego se podrá señalar una otra quantidad G menor que el círculo A, que tenga con el círculo B la misma razon que tiene el polígono de 12 lados inscrito en A, al inscrito de 12 lados en B; siendo pues la quantidad G menor que el círculo A, se diferenciará de dicho círculo en alguna quantidad; y por el *lema* 1 se podrá inscribir en el círculo A un otro polígono, que le falte ménos para igualar con el círculo A, que lo que le falta á G, y por consiguiente será mayor que G. Sea este polígono el de 24 lados, y supóngase otro semejante á este, inscrito en el círculo B.

De-

Demonstracion. La quantidad G se supone tener con el círculo B la misma razon que el polígono de 12 lados inscrito en A tiene al otro su semejante inscrito en B: y como todos los polígonos semejantes inscritos tengan entre sí una misma razon, que es la duplicada de los diámetros, (1) la misma razon tendrá el polígono de 24 lados inscrito en A á su semejante inscrito en B, que tiene la quantidad G al círculo B: luego alternando, la misma razon tendrá el polígono de 24 lados inscrito en A á la quantidad G, que tiene el polígono inscrito en B al círculo B. El dicho polígono inscrito en A es mayor que G: luego el polígono inscrito en B, es mayor que el círculo B, la parte que su todo, lo que es absurdo: luego el círculo A al círculo B no tiene mayor razon, que el polígono inscrito en A al inscrito en B: del mismo modo probaré, que no tiene menor razon. Tienen pues los círculos entre sí la misma razon, que los polígonos inscritos que degeneran en ellos.

PROP. II. Teorema.

Los círculos tienen entre sí razon duplicada de la de sus diámetros.

Demonstracion. Los polígonos semejantes inscritos en los círculos, degeneran en ellos: (*lem.* 1) luego los círculos tienen entre sí la misma razon, que los polígonos semejantes inscritos; (*lem.* 3) estos (1) tienen la razon duplicada de sus diámetros: luego tambien los círculos.

COROLARIOS.

1 *Los círculos son entre sí como los quadrados de los diámetros; porque los quadrados tienen la razon duplicada de sus lados: siendo pues sus lados los diámetros, tienen razon duplicada de los diámetros, como tambien los círculos.*

2 *Las circunferencias de los círculos tienen entre sí la misma razon que los diámetros; porque así como los polígonos inscritos degeneran en los círculos, así las periferias de los polígonos degeneran en las periferias de los círculos: luego* (lem. 3) *las circunferencias de los círculos tienen entre sí la misma razon que las periferias de los polígonos inscritos; estas son entre sí como los diámetros:* (corol. *de la* 1) *luego tambien aquellas.*

PROP.

PROP. III. y IV.

Se omiten, porque ademas de ser prolixas y dificultosas, solo sirven para demonstrar la 5, la qual demonstraré sin ellas por camino mas fácil.

LEMA I.

Si un paralelepípedo, prisma, cilindro ó pirámide, se parte con un plano paralelo á la basa, la seccion es semejante á la basa. (*fig.* 27. *del lib.* 11.)

Digo lo primero, que la seccion PN paralela á la basa CA del paralelepípedo AG, es semejante á la basa CA; porque siendo el plano PN paralelo á CA, será AP paralelepípedo, y el plano PN igual y semejante á CA. (24, 11)

Digo lo segundo, que en el prisma CBALGE, la seccion PMN es semejante á la basa CBA; porque las rectas CBA se demonstrarán paralelas á PMN, y la CA á PN, como en semejante caso se demonstró en la *prop.* 24 del *lib.* 11: luego los triángulos PMN, CBA son (8, 1) totalmente iguales: luego son semejantes. Lo mismo se demonstrará en qualesquiera prismas de basas polígonas.

Digo lo tercero, que en los cilindros la seccion paralela á la basa, es tambien semejante á ella; porque considerando un cilindro circunscrito al paralelepípedo AG, será su basa un círculo circunscrito al paralelógramo CA: luego la seccion hecha por PN paralela á la basa, será tambien un círculo circunscrito al paralelógramo PN, y por consiguiente será la seccion semejante á la basa.

Digo lo quarto, (*fig.* 5.) que en la pirámide VXYD, la seccion QRST paralela á la basa VXYZ, es semejante á dicha basa; porque siendo dichos planos paralelos, serán VX, QR paralelas, como tambien VZ, QT, y XZ, TR: luego (10, 11) los ángulos XVZ, RQT, como tambien VXZ, QRT son iguales: luego los triángulos VXZ, QRT son equiángulos, y (4, 6) sus lados serán proporcionales: luego son semejantes. Lo mismo se demonstrará de los otros triángulos RST, XYZ: lo mismo de los quadriláteros QS, VY, y de qualesquiera pirámides de basas polígonas.

LE-

LEMA II.

Si una pirámide tiene la basa paralelógrama, se parte por el vértice y ángulos opuestos en dos partes iguales. (*fig.* 5.)

La basa de la pirámide propuesta, es el paralelógramo YV, y su vértice es D. Digo que el plano DXZ la parte igualmente; porque considerando en qualquiera parte de la pirámide un plano SQ paralelo á la basa YV, será la seccion SQ un paralelógramo semejante á YV; (*lem.* 1) y los triángulos QRT, RST siempre entre sí iguales: luego la pirámide triangular XYZD, es igual á la pirámide triangular VXZD, por componerse de igual cantidad de planos siempre iguales.

PROP. V. y VI.

Se demonstrarán con mayor facilidad despues de la 7 en sus *corolarios*.

PROP. VII. Teorema.

Toda pirámide es la tercia parte del prisma de una misma basa y altura. (*fig.* 6.)

Explicacion. En el prisma triangular DBF considérese el plano CEA, que corte el prisma por el ángulo E y por la línea CA; y este sólido cortado será la pirámide ECBA, que tiene la misma basa que el prisma y la misma altura. Digo que esta pirámide es la tercia parte del prisma.

Preparacion. Para mayor claridad he puesto aparte en M el sólido remanente, despues de quitada la pirámide. Tírese la diagonal DA.

Demonstracion. El sólido remanente, es una pirámide, cuya basa es el paralelógramo CDFA, y su vértice es E. Considérese el plano DEA, que por su cúspide E y por la diagonal DA, parte dicha pirámide en dos partes, que (*lem.* 2) son dos pirámides iguales DECA, DEFA.

Asimismo, volviendo al prisma entero, el sólido DEBCA es una pirámide, cuya basa es el paralelógramo DEBC, y su vértice es A: luego si se parte por la diagonal CE y por el vértice A, se dividirá en dos pirámides iguales, (*lem.* 2) que son DECA, ECBA: siendo pues las pirámides DEFA, ECBA iguales con la pirámide DECA, serán

rán iguales entre sí, y todas las tres serán iguales: luego qualquiera de ellas es el tercio del prisma.

Lo mismo se demonstrará de las pirámides polígonas; porque tanto ellas, como el prisma de semejante é igual basa, se dividirán en triangulares; y cada pirámide triangular será el tercio de su prisma: luego todas las pirámides triangulares juntas; esto es, toda la pirámide polígona, será el tercio de todos los prismas triangulares; esto es, del prisma polígono de igual basa y altura.

COROLARIOS.

1 *Las pirámides, tanto triangulares cómo polígonas, que tienen igual altura, tienen la razon misma que sus basas; porque* (7) *son el tercio de sus prismas; estos si tienen igual altura, son como sus basas:* (corol. 1, 34) *luego* (15, 5) *tambien las pirámides. Esto es lo que contienen las* propos. 5 y 6 *de este libro.*

2 *Las pirámides de iguales basas, son como sus alturas, por la razon misma. Y si tienen iguales basas y alturas, son iguales, como los prismas de quienes son el tercio.*

PROP. VIII. Teorema.

Las pirámides semejantes tienen razon triplicada de la de sus lados homólogos. (fig. 7.)

Primero. Sean las pirámides triangulares OACB, KHIN. Digo que están en razon triplicada de sus lados homólogos AB, HN.

Preparacion. Acábense los paralelógramos AM, HQ, y sobre ellos los paralelepípedos AG, HL con la misma altura que las pirámides; y siendo estas semejantes, serán sus basas ACB, IHN semejantes: con que los paralelógramos AM, HQ tambien serán semejantes; y asimismo lo serán los paralelepípedos AG, HL.

Demonstracion. Cada uno de los dichos paralelepípedos se divide por los ángulos opuestos en dos prismas iguales; (28, 11) y cada prisma del paralelepípedo AG, es triplo de la pirámide OACB; y cada prisma del HL, es triplo de la pirámide KHIN: (7) luego cada dos prismas juntos; esto es, cada paralelepípedo es séxtuplo de su pirámide: lue-

luego (15 , 5) las pirámides tendrán entre sí la misma razon que los paralelepípedos; estos (33 , 11) tienen la razon triplicada de sus lados homólogos AB , HN : luego tambien las pirámides.

Segundo. Si las pirámides fuesen polígonas, se dividirian en triangulares, y se haria de ellas la misma demonstracion.

PROP. IX. Teorema.

Las pirámides iguales tienen las basas y alturas recíprocas; y las que tienen las basas y alturas recíprocas, son iguales. (*fig.* 8.)

Primero. Sean las pirámides triangulares BACO, HINL iguales. Digo que la basa BCO á la basa HNL, es como la altura HI á la altura BA. Perficiónense los paralelepípedos como en la proposicion antecedente.

Demonstracion. Consta de la demonstracion de la proposicion antecedente, que las pirámides son la sexta parte de los paralelepípedos: con que siendo las pirámides iguales como se supone, serán tambien los paralelepípedos iguales, los quales tienen por construccion las mismas alturas BA, HI que las pirámides, y las basas BE, HR duplas de las basas BCO, HNL de las pirámides. (34, 1). Por ser pues los paralelepípedos iguales, tienen (34, 11) las basas y alturas recíprocas; esto es, la basa BE á la basa HR como la altura HI á la altura BA: luego tambien las mitades de las basas de los paralelepípedos tendrán razon recíproca con las mismas alturas BCO con HNL, como HI á BA; luego las pirámides triangulares iguales tienen sus basas y alturas recíprocas.

Segundo. Si la basa BCO á la basa HNL es como HI á BA. Digo que las pirámides serán iguales; porque si BCO á HNL, es como HI á BA: luego BE dupla de BCO, á HR dupla de HNL, tambien será como HI á BA: luego (34, 11) los paralelepípedos serán iguales: luego tambien las pirámides que son su sexta parte. Si las pirámides fuesen polígonas, se dividirian en triangulares, y se haria el mismo argumento de cada una de ellas, y por consiguiente de todas juntas.

LEMA para la Prop. X.

Los prismas inscritos en los cilindros, degeneran en cilindros; y las pirámides polígonas inscritas en las cónicas, degeneran en ellas.

Demuéstrase este lema como el segundo para la *propos.* 2, y entendido aquel, no tiene este dificultad alguna; porque así como los polígonos planos, que infinitamente se inscriben en los círculos degeneran en ellos, así tambien los sólidos que tienen por basa aquellos polígonos, como son los prismas y pirámides, degeneran en los sólidos que tienen por basa aquellos círculos, como son los cilindros y pirámides cónicas.

PROP. X. Teorema.

Toda pirámide cónica, es la tercia parte del cilindro que tiene la misma basa y altura.

Demonstracion. Si dentro de un círculo se inscribe qualquiera polígono, y sobre él como basa se levanta un prisma y una pirámide de igual altura, la pirámide será (7) el tercio del prisma; y esto será siempre en quantos prismas y pirámides se inscriben infinitamente: luego degenerando los prismas en cilindros, y las pirámides polígonas en cónicas, será (*porisma universal*) la pirámide cónica el tercio del cilindro de igual basa y altura.

PROP. XI. Teorema.

Las pirámides cónicas de una misma altura, tienen la misma razon que sus basas, y asimismo los cilindros.

Demonstracion. Las pirámides polígonas de igual altura inscritas en las cónicas, son entre sí como sus basas. (6) Las pirámides polígonas degeneran en las cónicas: (*lema de la* 10) luego (*por el poris. univers.*) las pirámides cónicas son entre sí como sus basas. De que se sigue, que por ser los cilindros triplos de las pirámides cónicas, estarán tambien en la misma razon que sus basas.

COROLARIO.

De aquí se infiere, en virtud de la misma demonstracion, que los prismas y cilindros de una misma altura, están en la mis-

misma razon que sus basas; y tambien qualquiera pirámide cónica comparada con otra polígona de igual altura.

PROP. XII. Teorema.

Las pirámides cónicas y los cilindros semejantes, tienen entre sí razon triplicada de la de los diámetros de sus basas. (*fig.* 9.)

Explicacion. Sean las pirámides cónicas BAF, QZR. Digo que tienen entre sí la razon triplicada de la de BF, QR diámetros de sus basas.

Preparacion. Inscríbanse en los círculos de sus basas qualesquiera polígonos semejantes, y sobre ellos las pirámides polígonas que serán semejantes é inscritas en las cónicas.

Demonstracion. Las pirámides polígonas inscritas tienen entre sí, por ser semejantes, la razon triplicada de sus lados BL, QE; (8) BL á QE tiene la razon de los diámetros BF á QR: (1) luego las pirámides polígonas tienen entre sí razon triplicada de los diámetros BF, QR; las pirámides cónicas, por degenerar en ellas las polígonas, tienen (*por el porisma univer.*) la misma razon que las polígonas: luego tienen razon triplicada de los diámetros BF, QR. Y siendo los cilindros triplos de las pirámides cónicas, tendrán tambien como ellas razon triplicada de BF á QR.

PROP. XIII. Teorema.

Si un cilindro se corta con un plano paralelo á las basas, cortará las partes del exe en la misma razon que las partes del cilindro.

Demuéstrase como la 1. del *lib.* 6 y la 25 de este libro; y lo mismo se verificará de la superficie del cilindro.

PROP. XIV. Teorema.

Los cilindros de una misma ó igual basa, tienen la razon misma que sus alturas; y asimismo las pirámides cónicas. (*fig.* 10.)

Explicacion. Sean los cilindros CI, AR, cuyas basas sean iguales. Digo que tienen entre sí la misma razon que sus alturas LQ, SF.

Preparacion. Córtese del mayor AR el cilindro AO de igual altura á la de CI: con que los cilindros AO, CI serán iguales. (11)

Demonstracion. Siendo (13) el cilindro AO á AR, como LE á LQ, tambien el cilindro CI será á AR, como LE á LQ; esto es (por ser SF, LE iguales) como SF á LQ. Lo mismo queda demonstrado de las pirámides cónicas, por ser el tercio de los cilindros.

PROP. XV. Teorema.

Los cilindros iguales tienen las basas y alturas recíprocas; y los que tienen las basas y alturas recíprocas, son iguales, y asimismo las pirámides cónicas.

Esta proposicion se demuestra como la 34 del 11, valiéndose de las *proposiciones* 11 *y* 13 de este libro; y entendida aquella, no se hallará en esta dificultad alguna.

ESCOLIO.

De lo demonstrado en varias propos. *del* lib. 1 y 6 *consta, que los paralelógramos y triángulos, si tienen igual basa y altura, son iguales; si igual basa, son como las alturas; si igual altura, son como las basas. A que añado, que si tienen diferentes basas y alturas, tienen razon compuesta de alturas y basas: y aunque esto último se puede deducir de la* propos. 23 *del* lib. 6, *juzgo por conveniente se demuestre con especialidad.*

Asimismo en varias proposiciones de este libro se ha demonstrado, que los paralelepípedos, prismas, cilindros y pirámides, si tienen igual basa y altura, son iguales; si igual basa, son como las alturas; si igual altura, como las basas. A que se ha de añadir lo que omitió Euclídes, que si las basas y alturas son diferentes, tienen razon compuesta de alturas y basas. Demonstraré pues esto en los cilindros: y la misma demonstracion servirá para los demas sólidos sobredichos, como tambien para los triángulos y paralelógramos.

Sean

Sean los cilindros AR, FD (fig. 10.) de diferente basa y altura. Digo que tienen razon compuesta de las basas y alturas. Córtese del mas alto AR el cilindro AO de igual altura á FD: y sea como la basa VT á la basa MH, así FN á X; y como la altura ND ó BO, á la altura BR, así X á Z; y será la razon de FN á Z compuesta de la razon FN á X, que es la de las basas; y de X á Z, que es la de las alturas: luego probando que el cilindro FD es al cilindro AR, como FN á Z, quedará probado tener razon compuesta de sus basas y alturas.

Demonstr. (11) *El cilindro FD, es al cilindro AO, como la basa VT á MH; esto es* (por construc.) *como FN á X: el cilindro AO es al cilindro AR, como BO á BR;* (13) *esto es, como X á Z: luego* (25, 5) *el cilindro FD es al cilindro AR, como FN á Z.*

PROP. XVI. y XVII.

Se omiten, porque ademas de ser prolixas, no son menester.

LEMA I.

Los polihedros semejantes inscritos en las esferas, tienen entre sí razon triplicada de la de los diámetros de las esferas. (fig. 11.)

Explicacion. Sean los polihedros semejantes MN, TL inscritos en las esferas, cuyos centros son C y R. Digo que tienen entre sí razon triplicada de la de los diámetros ó semidiámetros CA, RP de las esferas. Estos polihedros si estuvieren enteramente pintados, serian como S; pero por evitar confusion, solo se expresa en cada uno de ellos un triángulo de los que componen su superficie.

Preparacion. Del centro C á cada ángulo del triángulo AEB tírense las rectas CA, CE, CB, las quales serán semidiámetros, por estar los puntos A, E, B en la superficie de la esfera. (*def.* 22, 11) Hágase lo mismo en el triángulo PHQ.

Demonstracion. ACEB es una pirámide triangular, cuyo vértice está en el centro C de la esfera, y asimismo PRHQ: estas pirámides son terminadas de igual número

de

de triángulos semejantes, pues todos se suponen equiángulos, con que (*def.* 9, 11) son pirámides semejantes: luego (8) tienen entre sí razon triplicada de la de sus lados homólogos CA, RP; esto es, de los semidiámetros de la esfera. Lo que se ha demonstrado de las dos pirámides sobredichas, se demonstrará de todas las que se hicieren sobre las demas superficies triangulares de los polihedros, y terminadas en los centros C, R: luego los sólidos polihedros MN, TL, que enteramente se componen de ellas, tienen entre sí razon triplicada de la de los diámetros CA, RP de las esferas.

LEMA II.

Los polihedros inscritos en la esfera, degeneran en ella.

Este lema se demuestra como el *lema* 2 para la *propos.* 2, aplicando á los polihedros respecto de la esfera, lo que allí se dixo de los polígonos respecto del círculo, que no repito por evitar la prolixidad.

PROP. XVIII. Teorema.

Las esferas están en razon triplicada de la de sus diámetros. (*fig.* 11.)

Demonstracion. Los polihedros inscritos en las esferas MN, TL degeneran en las esferas; (*lema* 2) luego (*porisma univers.*) tendrán las esferas entre sí la razon misma, que tienen dichos polihedros inscritos; estos (*lema* 1) tienen razon triplicada de los diámetros ó semidiámetros CA, RP de las esferas: luego estas tienen entre sí razon triplicada de sus diámetros.

COROLARIO.

Las esferas tienen entre sí la misma razon, que los cubos de sus diámetros; porque estos cubos son paralelepípedos semejantes: luego (33, 11) *tienen la razon triplicada de sus lados, que son los diámetros de las esferas; estas tienen entre sí la razon triplicada de los mismos diámetros*: (por lo demonstrado) *luego tienen la razon misma, que los cubos de sus diámetros.*

TRA-

TRATADO II.

DE LA

ARITMÉTICA INFERIOR.

LA Aritmética es una de las mas principales partes de la Matemática, que juntamente con la Geometría las precede y acompaña á todas. Las precede, por ser, segun Platon, la puerta no solo de estas, sí de otras Facultades mayores: y segun Sócrates, la oficina en que se labran los mas sutiles ingenios. Las acompaña, porque apénas se hallará problema alguno donde no tengan lugar las operaciones numéricas. Es la Aritmética: *Ciencia que trata de los números ó quantidad discreta.*

Divídese primero en *inferior* y *superior*. La *inferior*, se ocupa en las mas ordinarias operaciones; y esta es la materia de este tratado. La *superior*, se levanta á la composicion y resolucion de las potestades numéricas, estableciendo los principales fundamentos de la Algebra, que será empleo de otro tratado. Segundo, se divide en *especulativa* y *práctica*: aquella considera las propiedades de los números; y esta da reglas ciertas para usar de ellas.

LI-

LIBRO I.

DE LAS REGLAS ELEMENTARES,

Y LOGÍSTICA DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

DEFINICIONES.

1 *UNidad es la que á qualquiera cosa la domina una*, Eucl. *def.* 1 del *lib.* 7, como un hombre, una piedra, &c.

2 *Número es una coleccion de unidades*, Eucl. *def.* 1 del *lib.* 7, como *quatro*, es una coleccion de quatro unidades.

De aquí se colige lo primero, que la unidad no es número, por no componerse de otras unidades, aunque Caramuel quiera defender lo contrario: y quando la unidad se considera dividida en partes, como en tercias, quartas, &c. ya no se toma como unidad, sí como número. En tanto pues se llama unidad, en quanto la suponemos indivisible; pero en variando la suposicion, considerándola dividida en partes, ya dexa de ser unidad, y pasa á tener la razon de número, y se transfiere la razon de unidad á cada una de las partes de la division: como por exemplo, quando decimos que una pieza de paño consta de 50 varas, la vara es la unidad; pero quando afirmamos que la vara es quatro palmos, variamos la suposicion, y la tomamos como número compuesto de quatro unidades que son los palmos.

Colígese lo segundo, que la materia del número son las unidades de que se compone; pero la forma es el conocimiento que numera, y colectivamente dice ser diez, veinte, &c. con que dixo bien Aristóteles, que el número se halla propiamente en el alma del hombre.

3 El *número* se divide en *par* é *impar*. Número *par*, es el que se puede dividir enteramente en dos partes iguales, ó el que tiene mitad, como el 2, el 4, 6, &c. Número *impar*, es el que no se puede dividir enteramente en dos

dos partes iguales, como el 3, el 5, &c. Algunas divisiones del número omito, por no ser de utilidad; otras se explicarán en sus lugares.

CAPITULO I.

DEL NUMERAR.

LA Logística de los números enteros se reduce á saber executar quatro géneros de operaciones en los números, que son *sumar*, *restar*, *multiplicar* y *partir*; pero ántes de esto es menester saber numerar, que es lo mismo que saber leer un número escrito con sus propios caractéres.

Los caractéres con que se escribe qualquiera número por crecido que sea, son solamente los diez que se siguen:

uno,	*dos,*	*tres,*	*quatro,*	*cinco,*	*seis,*	*siete,*	*ocho,*	*nueve,*	*cero.*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Cada uno de estos caractéres, quando está solo significa las unidades sobredichas; esto es, 1 significa *uno* ó *una unidad*; 2 significa *dos* ó *dos unidades*, &c. Solo el *cero* por sí solo no tiene valor alguno. Quando muchos de estos caractéres se juntan uno al lado del otro, van aumentando su valor en decupla proporcion, de esta suerte: Comenzando por la mano derecha, respecto de quien lee, el primer caracter vale *unidades*; el segundo vale *decenas*, como diez, veinte, treinta, quarenta, cinqüenta, sesenta, setenta, ochenta y noventa; y el tercero vale *centenares*, como ciento, doscientos, &c. Sirva de exemplo 492. El primer caracter á la derecha significa dos, y por estar en el primer lugar, significa *dos unidades*; el segundo es 9, nueve, y por estár en segundo lugar, significa nueve decenas ó *noventa*; el tercero es 4, quatro, y por tener el tercer lugar, significa quatro centenares ó *quatrocientos*: y leyendo todo junto de la siniestra á la derecha, será todo *quatrocientos noventa y dos*.

El cero por sí solo ó ántes de otro número, no tiene valor; pero puesto despues de un número le aumenta en de-

decupla proporcion: y así 2 solo significa *dos*, y con un cero 20 es ya *veinte*, y con dos ceros 200 *doscientos*, *&c.*

Para dar el debido valor á los caractéres se han de observar tres cosas: la figura del caracter, el lugar y la dignidad; y por cada cosa de estas tiene cada caracter su valor. Las figuras de los caractéres son diez, cuyo valor queda explicado. Los lugares solo son tres, el primero á la derecha es de unidades, el segundo de decenas, y el tercero de centenares, como dixe. Las dignidades pueden ser infinitas: como unidad, millar, cuento, bicuento, tricuento, &c. y en cada dignidad se hallan los tres lugares referidos, y proceden con el órden siguiente:

de tricuentos			de millares			de bicuentos			de millares			de cuentos			de millares			de unidades		
Centena	Decena	Unidad	Centena	Decena	Unidad	Centena	Decena	Unidad	Centena	Decena	Unidad	Centena	Decena	Unidad	Centena	Decena	Unidad	Centena	Decena	Unidad
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	&c.																			

Entendido esto, quien sepa numerar una cuenta de tres caractéres, numerará otra qualquiera por crecida que sea. Divídase toda la serie de tres en tres letras, comenzando por la maño derecha, como se vé en la siguiente.

13.132.525.781.398.674.149.276.432.124.247.
5 4 3 2 1

Póngase debaxo del primer número de la tercera division 1, á la quinta 2, á la séptima 3, á la nona 4, á la undécima 5, y así infinitamente. Estos números sirven de exponentes, que declaran las dignidades: el 1 significa cuen-

tos,

tos, el 2 bicuentos, el 3 tricuentos, &c. y los que no tienen exponente, son millares, ménos el primero á la derecha, que siempre pertenece á las unidades: lo que se vé claramente, cotejando estas reparticiones con las de la tabla antecedente. Esto supuesto, las letras del primer punto, empezando por la izquierda, son 13; y porque baxo tienen el exponente 5, serán trece quinticuentos: las que se siguen hasta el punto son 132; y porque no tienen exponente, son ciento y treinta y dos mil. Las que se siguen hasta el otro punto son 525; y porque llevan el exponente 4 serán quinientos veinte y cinco quadricuentos, y así de las demas. Con que el valor de toda la serie será 13 quinticuentos, 132 mil; 525 quadricuentos, 781 mil; 398 tricuentos, 674 mil; 149 bicuentos, 276 mil; 432 cuentos, 124 mil; 247 unidades, reales ó libras, &c.

De la misma manera se hará la numeracion en la serie siguiente:

40.300.693.434.200.101.340.203.000.
4 3 2 1

40 quadricuentos, 300 mil; 693 tricuentos, 434 mil; doscientos bicuentos, 101 mil; 340 cuentos, y 203 mil: y así en las demas.

CAPITULO II.

DE LAS MONEDAS, PESOS Y MEDIDAS.

Es grande la variedad de monedas, pesos y medidas que hay en diferentes Reynos, lo que hace esta materia muy dificultosa. Recogeré en este capítulo las que al presente corren en estos Reynos, para que el Aritmético pueda en qualquiera de ellos formar sus cuentas, dexando las extrangeras; principalmente, porque siendo unas mismas las reglas, podrá usar de ellas, valiéndose de las noticias de personas prácticas en el Pais.

MONEDAS DE CASTILLA.

El doblon vale al presente quatro reales de á ocho Mexicanos. El real de á ocho Mexicano, Segoviano ó Sevillano va-

vale 10 reales de plata ó 15 de vellon. El real de á ocho de María vale 8 reales de plata ó 12 de vellon. El real de vellon vale 34 maravedís ú 8 quartos y medio. El quarto vale 4 maravedís. El ochavo 2 maravedís. (*)

PESOS DE CASTILLA.

El quintal tiene 4 arrobas ó 100 libras: la arroba contiene 25 libras: la libra 16 onzas: la onza 16 adarmes.

El marco tiene 8 onzas ó media libra: si es de oro se divide en 50 Castellanos: cada Castellano en 8 tomines, y cada tomin en 12 granos; pero si es de plata se divide en 8 onzas: cada onza en 8 ochavas, y cada ochava en 75 granos. Algunos quieren que se divida en 6 tomines; y por consiguiente en 72 granos: y así, que los granos del marco de la plata sean ménos en número que los del oro; pero todos juntos en el peso iguales.

MEDIDAS DE CASTILLA.

La vara de Castilla tiene 4 palmos: el palmo 12 dedos: el pie es la tercera parte de la vara: el codo es media vara.

El moyo tiene 16 cántaros ó arrobas: el cántaro 8 azumbres: el azumbre 4 quartillos. El cántaro de aceyte

(*) *Por Reales Decretos de* 8 *de Febrero* 1726 *y* 14 *del mismo, y* 8 *de Setiembre* 1728, *se aumentó la plata una quarta parte en las piezas mayores, y lo mismo en el oro; y en* 11 *de Julio* 1736 *mandó su Mag. que en todos los contratos públicos y privados que tratasen de pesos, se entendiesen puntual y precisamente de á ocho reales de plata de* 16 *quartos ó de* 15 *reales y* 2 *maravedís de vellon, con graves penas impuestas en dichos Reales Decretos, con lo que quedó igualado el peso en Castilla, Aragon y Valencia.*

Posteriormente, y con fecha de 16 *de Mayo* 1737 *se sirvió su Mag. aumentar la plata á* 68 *maravedís por real de plata, dexando el oro en su valor; pero no por eso aumentó el valor de los pesos: con que al presente vale el doblon sencillo* 75 *reales de vellon y* 10 *maravedís, y por consiguiente* 37 *reales de plata y* 44 *maravedís. El real de á ocho ó peso duro,* 10 *reales de plata de* 17 *quartos ó* 20 *reales vellon.*

te tiene 4 quartas: una quarta 16 panillas: la panilla pesa casi 4 onzas.

Un cahiz tiene 12 hanegas: la hanega 12 celemines: el celemin 4 quartillos.

MONEDAS DE VALENCIA.

La libra tiene 20 sueldos ó 10 reales: el sueldo 12 dineros: el real 24 dineros: el real que llaman Valenciano 18 dineros. El doblon vale 3 lib. 17 sueldos. El real de á ocho Mexicano 19 sueldos y 6 dineros. (*)

PESOS DE VALENCIA.

La carga tiene 3 quintales, quando la arroba es de 30 lib. pero quando es de 36 tiene 10 arrobas: y tanto pesa la carga en un caso como en otro. El quintal consta de 4 arrobas de 30 libr. La arroba es en dos maneras: una de 30 libr. que llaman sutil ú de peso delgado; y otra de 36 libr. que es la gruesa. La arroba de la harina es de 32 libras: la libra tiene 12 onzas; pero la de pescado fresco menudo tiene 16 onzas, y de pescado gordo 18: la de carne 36. La onza tiene 4 quartos: el quarto 4 adarmes: el adarme 36 granos, solo el de olores tiene 32.

MEDIDAS DE VALENCIA.

La vara tiene 4 palmos, y tambien 3 pies: el palmo 4 quartos: el quarto 3 dedos: el codo es media vara. La braza real tiene 9 palmos; y siendo quadrada tendrá 81 palmos. La cuerda para medir los campos tiene 20 brazas ó 45 varas. La fanegada de tierra tiene 200 brazas quadradas. La cahizada tiene 6 fanegadas ó 1200 brazas quadradas. La yugada tiene 6 cahizadas ó 7200 brazas quadradas.

La carga de vino y vinagre tiene 15 cántaros ó arrobas: el cántaro 4 quartas ó azumbres. La carga de aceyte tiene 12 cántaros ó arrobas.

El cahiz tiene 12 barchillas: la barchilla 4 celemines: el celemin 4 quarterones.

MO-

(*) *Por los citados Reales Decretos el dinero de Valencia es igual al de Castilla y Aragon; y por consiguiente el peso de Aragon, Valencia y Castilla son iguales, como tambien el doblon y real de á 8; y siendo la libra de Valencia 20 sueldos, el sueldo es 12 dineros y 4 quintos, y el real 25 din. y 3 quintos.*

MONEDAS DE ARAGON.

La libra tiene 20 sueldos: el sueldo 12 dineros: el real 24 dineros: el doblon vale 3 libr. 4 sueld. el real de á ocho Mexicano 16 sueldos. (*)

PESOS DE ARAGON.

La carga tiene 3 quintales: el quintal 4 arrobas: la arroba 24 libr. y 30 libr. y 36 libr. segun fuere la mercadería. La libra 12 onzas; y siendo de pescado ó carne 36. La onza 4 quartos: el quarto 4 adarmes: el adarme 32 granos.

MEDIDAS DE ARAGON.

La vara tiene 4 palmos: el palmo 4 quartos.

Un nietro de vino ó carga tiene 16 cántaros: un cántaro 28 libras.

El cahiz tiene 8 hanegas: la hanega 3 quartales por lo ordinario; el quartal 4 celemines.

MONEDAS DE CATALUÑA.

La libra vale 20 sueldos: el sueldo 12 din. el real 24 din. la dobla 55 reales; el real de á ocho Mexicano 14 real. (**)

PESOS DE CATALUÑA.

La carga tiene 3 quintales: el quintal 4 arrobas: la arroba 26 libras: la libra 12 onzas: la onza 4 quartos: el quarto 4 adarmes; el adarme 36 granos.

MEDIDAS DE CATALUÑA.

La cana tiene 8 palmos: el palmo 4 quartos.

La carga de vino tiene 32 quarteros: el quartero 4 quartos.

La

(*) *En Aragon se cuentan al presente las monedas con el órden siguiente: La libra Jaquesa vale* 20 *sueldos, y el sueldo* 12 *dineros de plata ó* 16 *menudos; y por consiguiente el real siempre se entiende de* 16 *quartos ó* 32 *dineros, á excepcion de la Comunidad de Teruel, que á causa de confinar con Valencia, contratan por lo regular con moneda Valenciana.*

(**) *Es de suponer, que el doblon de á ocho, que en Valencia, Aragon y Castilla vale* 20 *pesos, en Cataluña vale* 28 *libr. y por consiguiente un peso de aquellos Reynos, será en este* 1 *libra y* 8 *sueldos: una peseta* 7 *sueldos,* 5 *dineros y* 1 *quarto; y en suma* 16 *dineros de Valencia, Castilla y Aragon, son* 21 *ardites de Cataluña.*

La carga de aceyte 30 cortanes: el cortan 16 quartos. La quartera de trigo tiene 12 cortanes.

CAPITULO III.

DE LOS PESOS Y MEDIDAS SOBREDICHOS, comparados entre sí.

LA reduccion de los pesos y medidas de un Reyno á los de otro, es importantísima á los Tratantes: y esta no se puede hacer sin tener noticia de la correspondencia que tienen entre sí; cosa bien dificultosa, por la poca conformidad de los Autores: las principales de estos Reynos, averiguadas con toda diligencia, he reducido á la Tabla siguiente:

TABLA

DE LA CORRESPONDENCIA DE DIFERENTES PESOS Y MEDIDAS.

PESOS.

	Castilla,	Valencia,	Aragon,	Cataluña.
Onzas	32.	31.		
Onzas	35.		36.	
Onzas	14.			12.
Onzas		23.	24.	20.
Onzas		115.	120.	100.

MEDIDAS.

	Castilla,	Valencia,	Aragon,	Cataluña.
Palmos	13.	12.		
Palmos	95.	88.	102.	100.

MEDIDAS DE GRANOS.

	Castilla,	Valencia,	Aragon,	Cataluña.
Celemines	12.	13.	11 y 3 oct.	
Celemines		48.	42.	
Celemines	384.	416.	quarteras 25.	

Teniendo el cántaro ó arroba Valenciana 36 libras, 16 azumbres de Valencia, hacen 26 de Castilla con poca di-

diferencia; pero teniendo el cántaro 30 libras, 22 azumbres Valencianos, son los mismos 26 Castellanos con poca diferencia.

Adviértase, que lo que se dice en la Tabla de la correspondencia de unos palmos con otros, se ha de entender tambien de unas varas con otras, y lo mismo de los pies; y que el pie Valenciano es igual al Geométrico ó Romano antiguo, que es el que se usa en Roma al presente: y así los palmos y varas Valencianas son iguales á las de Roma.

CAPITULO IV.

DEL SUMAR.

S*Umar, es juntar muchos números en uno, para saber el valor de todos juntos*; y el agregado de dichos números se llama *suma*. Las reglas del sumar, son las contenidas en la proposicion siguiente.

PROP. I. Problema.

Sumar unos números con otros.

REGLA I.

Escríbanse las partidas que se han de sumar unas sobre otras de suerte, que las unidades correspondan á las unidades, decenas á decenas, &c. comenzando siempre iguales á la mano derecha; súmense las unidades, y escríbase debaxo de ellas su suma, si no llegare á formar decenas; y asimismo se sumarán las decenas.

Exemplo. Pídese se sumen las dos partidas 432 y 245.

432
245
677

Dispónganse en la forma dicha, como aquí se vé; y súmense lo primero las unidades, diciendo: 2 y 5 son 7; escríbase 7 debaxo de las unidades, y prosígase á sumar las decenas: 3 y 4 son 7; escríbase en segundo lugar, que es el de las decenas, y se sumarán las centenas, diciendo: 4 y 2 son 6, y escrito el 6 en el tercer lugar, que es el de las centenas, será la suma 677.

REGLA II.

Si la suma de las unidades pasare de 10, se pondrá deba-

baxo el número, en que exceden al 10, y por cada decena se llevará uno para juntarlo con las decenas siguientes; y lo mismo se observará en las centenas y millares; &c.

Exemplo. Se han de sumar estas dos partidas 459 y 665. Dispuestas como ántes, diré: 9 y 5 son 14; y porque en 14 hay una decena y 4, escribo el 4 en su lugar, y reservo la decena para sumarla con las decenas, diciendo: 1 que llevo, y 5 son 6, y 6 son 12; escribo 2 debaxo las decenas, y reservo las diez decenas, que son una centena, para sumarla con las centenas; digo pues: 1 y 4 son 5, y 6 son 11; escribo 1 debaxo las centenas; y las diez centenas, que es un millar, le escribo en el quarto lugar propio de los millares, y es la suma 1124.

459
665
1124

REGLA III.

Si las unidades sumadas hicieren dieces justos, y lo mismo las centenas, millares, &c. se pondrá debaxo un cero, y se llevarán tantos como fueren las decenas. Tambien la suma de muchos ceros no es mas que un cero.

Exemplo. Las dos partidas 5750 y 4250 se sumarán así: porque en la serie de las unidades no hay mas que ceros, pongo baxo de ellas un cero; y prosigo diciendo: 5 y 5 son 10 justos; pongo pues un cero, y llevo una decena; que junta con el 7 es 8; y 2 son 10: pongo en su lugar el cero, y llevo un millar; que junto con el 5 hace 6 y 4 hacen 10: pongo el cero en su lugar, y la una que llevo la escribo á su lado, por no haber mas que sumar, y es toda la suma 10000.

5750
4250
10000

Demonstracion de las reglas. Sumando 9 con 5 son 14; esto es, una decena y quatro unidades: luego las quatro unidades se han de escribir en su propio lugar, que es el primero, y la decena en el segundo: luego se ha de juntar con las demas decenas, que se han de escribir tambien en el mismo lugar. Lo mismo diré de los centenares, millares, &c.

459
665
14
11
10

CAPITULO V.

DEL RESTAR.

Restar, es quitar un número menor de otro mayor, para conocer el exceso del mayor al menor: y este exceso se llama *residuo*. El restar se hace observando las reglas de la proposicion siguiente.

PROP. II. Problema.

Restar un número de otro.

REGLA I.

Escríbase el número menor debaxo del mayor, de suerte, que á la mano derecha comiencen iguales, y empiécese por la mano derecha á quitar el número inferior del superior, y lo que sobrare, se pondrá debaxo en su propio lugar.

Exemplo. Pídese, que de la cantidad 869 se resten 234.: escribo la menor debaxo de la mayor, y empiezo á restar diciendo: si de 9 quito 4, restan 5: escribo 5 en su lugar, y prosigo: si de 6 quito 3, quedan 3, que pongo en su lugar, y digo: si de 8 quito 2, sobran 6, y queda hecha la resta, y digo, que el residuo es 635.

$$\begin{array}{r} 869 \\ 234 \\ \hline 635 \end{array}$$

REGLA II.

Quando la cifra que se ha de restar es mayor que la superior, se añadirán á la superior diez, y se hará la resta como ántes.

Exemplo. 489 se han de restar de 658: pues porque 9 es mayor que 8, añado diez al 8 y es 18, y digo: si de 18 quito 9, quedan 9: escríbole en su lugar; y porque la decena que se añadió al 8 se tomó de las 5 decenas que están á su lado, el 5 queda hecho 4; y porque 8 es mayor que 4, añado diez al 4, y digo: si de 14 quito 8, restan 6, que escribo en su lugar; y porque la decena que añadí al 4 se tomó del 6, este viene á ser 5, y digo: si de 5 quito 4, resta 1, y es todo el residuo 169.

$$\begin{array}{r} 658 \\ 489 \\ \hline 169 \end{array}$$

Pué-

Puédense restar semejantes partidas del modo siguiente. Porque 9 es mayor que 8, añado al 8 una decena, y digo: si de 18 quito 9, sobran 9, y llevo 1, y añádole al 8 que está debaxo del 5, y quedará hecho 9: y porque 9 es mayor que 5, le añadiré 10 al 5, y diré: si de 15 quito 9, sobran 6, y llevo 1, que con el 4 que se sigue hace 5, que restados de 6, sobra 1, y es el residuo 169 como ántes. Este modo es equivalente al primero; porque lo mismo es añadir 1 al 8, y restar 9 de 15, que quitarle á 15 una unidad, y restar 8 de 14, porque en todo caso será el residuo 9.

El modo siguiente es el que regularmente se usa, y viene á ser lo mismo que los pasados. En el mismo exemplo: quien debe 8 y paga 9, paga mal, pues de 9 á 10 va 1, que junto con el 8 de arriba, hace 9: escribo 9 en su lugar, y llevo 1, que junto con el 8 de la partida inferior, hace 9, y digo: quien debe 5 y paga 9, paga mal; de 9 á 10 va 1, y 5 de arriba son 6: escribo 6, y llevo 1, que con el 4 hace 5, que quitados de 6, sobra 1, y es el residuo 169.

REGLA III.

Si el guarismo inferior fuere cero, y no se llevare algo de la operacion antecedente, escríbase el mismo guarismo superior debaxo de la línea; porque si de este número se quita cero, que es nada, es visto ha de quedar el mismo número: pero si se llevare algo, se restará esto del número superior, y el residuo se escribirá debaxo.

Exemplo. 1060 se han de restar de 2745: comienzo la operacion, diciendo: quien debe 5 y paga nada, debe 5, y escribo el 5 debaxo de la raya; y prosigo: quien debe 4 y paga 6, paga mal; de 6 hasta 10 van 4, que con los 4 de arriba hacen 8: escritos los 8, llevo 1, que quitado de 7, sobran 6, como tambien del 2 de arriba quitando 1, queda 1, y es la resta 1685.

$$\begin{array}{r} 2745 \\ 1060 \\ \hline 1685 \end{array}$$

REGLA IV.

Si la cifra que se resta, y la de quien se resta, son iguales, el residuo es cero; como tambien si un cero se resta de otro.

420 220 ——— 200	*Exemplo.* 220 se han de restar de 420. Digo pues: quien de cero quita cero, el residuo es cero; escribo cero, y prosigo: quien debe 2 y paga 2, ha pagado, así pongo debaxo un cero: quien debe 4 y paga 2, debe 2, que escrito en su lugar, es la resta 200.

REGLA V.

Quando arriba hay ceros, se pondrá por residuo lo que va de cada cifra de lo que se resta, hasta diez, llevando uno á la cifra siguiente.

8000 3942 ——— 4058	*Exemplo.* Se ha de restar 3942 de 8000. Empiezo diciendo: de 2 á 10 van 8, que escribo debaxo, y llevo 1, que con 4 hace 5, pues de 5 á 10 van 5; escríbolos debaxo, y llevo 1, que con 9 hacen 10: de 10 hasta 10 va nada, pues escribo cero debaxo, y llevo 1, que con 3 hace 4, y quitados de 8, quedan 4, y es la resta 4058.

La demonstracion de las reglas, es tan clara, que no necesita mas que de hacer una atenta reflexîon sobre las operaciones mismas; porque con eso se hará manifiesto ser el residuo la diferencia que hay entre la cantidad que se resta, y aquella de quien se resta.

PROP. III. Problema.

Exâminar si la suma y resta están bien hechas.

La suma y resta son operaciones contrarias, de suerte, que deshace la una, lo que hizo la otra: por esta razon sirven mutuamente de prueba la una á la otra.

Prueba del sumar.

Si las partidas que se han sumado son dos, réstese de la suma qualquiera de las dos partidas, y quedará la otra, si está bien hecha la suma. Pero si las partidas sumadas son mas de dos, réstese qualquiera partida de la suma, y la resta ha de ser igual á la suma de las otras partidas, como se vé en los exemplos.

	3 2 5			4 2 1
	1 4 6			3 5 2
	1 2 8		Suma	7 7 3
Suma	5 9 9			4 2 1
Partida 1	3 2 5		Prueba	3 5 2

Prueba 2 7 4 igual á la suma de las partidas 2 y 3.

Prueba del restar.

Súmese la paga con la resta, y ha de salir la deuda, como en el exemplo.

Deuda	3 5 3
Paga	2 3 9
Resta	1 1 4
Prueba	3 5 3

CAPITULO VI.

DEL MULTIPLICAR.

MUltiplicar un número por otro, es buscar un tercer número, que contenga tantas veces al que se ha de multiplicar, quantas el multiplicador contiene la unidad: como multiplicar 8 por 4 es buscar el número 32, que incluye en sí quatro veces al 8, quantas el 4 incluye la unidad. Al número que se ha de multiplicar, llamarémos *cantidad*; al número por quien se ha de multiplicar, *multiplicador*; y al que sale de la multiplicacion, *producto*.

PROP. IV. Problema.

Multiplicar un número por otro.

Tres casos se pueden ofrecer en la multiplicacion. 1 Quando una sola letra se ha de multiplicar solo por otra. 2 Quando muchas se han de multiplicar por una. 3 Quando muchas se han de multiplicar por muchas. Resuélvense por las reglas siguientes.

RE-

REGLA I.

Para multiplicar una sola letra por otra, nos hemos de valer de la memoria, ó tener presente la siguiente Tabla, que llaman Pitagórica, por la qual se hallará el produĉto de una sola cifra por otra del modo siguiente. Se ha de multiplicar 8 por 6; esto es, quiero saber quántos hacen 6 veces 8, busco el 6 arriba en la frente de la Tabla, y el 8 en el lado izquierdo; y en la casilla correspondiente á los dos números dichos, hallo 48. Y lo mismo hallaré tomando el 8 arriba y el 6 al lado; pues lo mismo son 6 veces 8, que 8 veces 6. (16, 7) De la propia suerte se hallarán los demas números.

Tabla Pitagórica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

REGLA II.

Para multiplicar muchas letras por una, escríbase esta debaxo de la cantidad en el lugar de las unidades, y tírese una línea por debaxo: y comenzando por la mano derecha, váyanse multiplicando por ella todas las cifras de la cantidad una por una; y si lo que saliere de la multiplicacion tuviere un guarismo solo, se escribirá debaxo de la raya, en correspondencia al guarismo multiplicado; pero si tuviere dos, se escribirá el primero en la forma dicha, y el otro se guardará en la memoria, para juntarlo con el produĉto siguiente.

Exem-

Exemplo primero. 324 se multiplican por 2 en esta forma: 2 veces 4 hacen 8; escribo 8 debaxo la raya, en correspondencia del 4 multiplicado; y prosigo: 2 veces 2 son 4; escribo el 4, y 2 veces 3 son 6, y escrito el 6, es todo el producto 648.

```
324
  2
---
648
```

Exemplo segundo. Se ha de multiplicar 5824 por 3, y digo: 3 veces 4 son 12; escribo el 2 debaxo el 4, y guardo 1; prosigo diciendo: 2 veces 3 son 6, y 1 que llevo hacen 7; escribo 7 debaxo del 2, y digo: 3 veces 8 son 24; escribo 4, y llevo 2, y digo: 3 veces 5 son 15, y 2 que llevo son 17; escribo 7 debaxo del 5, y llevo 1, y por ser el último producto, escribo 1 al lado del 7, y es todo 17472.

```
 5824
    3
-----
17472
```

REGLA III.

Para multiplicar un número de muchos guarismos por otro tambien de muchos guarismos, se escribirá el multiplicador debaxo de la cantidad, de suerte, que se correspondan unidades con unidades, centenas con centenas, &c. Hecho esto, se multiplicará toda la cantidad por cada guarismo del multiplicador de por sí en la forma sobredicha; con que habrá tantos productos, como hay guarismos en el multiplicador: solo se ha de advertir, que el producto de cada una se ha de comenzar á escribir siempre debaxo del guarismo por quien se hace la multiplicacion, como se vé en el exemplo: últimamente se sumarán todos los productos, y la suma será el producto total.

Exemplo. 435 se ha de multiplicar por 24. Dispuestos como se vé, multiplico los 435 por 4, diciendo: 4 veces 5 son 20; escribo cero, y llevo 2: 3 veces 4 son 12, y 2 que llevo son 14; escribo 4, y llevo 1: 4 veces 4 son 16, y 1 que llevo 17; escribo el 17, y está hecho el producto primero. Multiplico ahora el mismo número 435 por 2, diciendo: 2 veces 5 son 10; escribo cero debaxo, en correspondencia del 2 multiplicador, y llevo 1: 2 veces 3 son 6, y 1 que lle-

```
  435
   24
-----
 1740
 870
-----
10440
```

vo son 7; escrito el 7, prosigo: 2 veces 4 son 8, y escrito este, es el segundo producto 870: sumo los dos productos, y tengo el producto total 10440. De la misma suerte se proseguirá si tiene mas guarismos el multiplicador.

Demonstracion. Consta de la misma operacion, que multiplicando 435 por 4, se ha tomado dicho número 4 veces: luego el producto primero incluye 4 veces el 435. Asimismo multiplicando el mismo 435 por 2, (esto es, por 20, que es el valor que tiene, por estar en segundo lugar) se ha tomado dicho número 435 veinte veces: luego el producto segundo le incluye 20 veces: luego los dos productos juntos ó sumados, le incluyen 24 veces; esto es, tantas veces, quantas hay unidades en el 24, que es la definicion del multiplicar.

ADVERTENCIAS.

1 El cero multiplicado por qualquiera número, solo produce un cero.

2 Si entre los guarismos del multiplicador ocurriere algun cero, basta poner cero en el producto parcial, baxo el mismo cero del multiplicador; y pasando á multiplicar por el otro guarismo, se escribirá el producto en la misma línea.

```
   630
   205
------
  3150
 12600
------
129150
```

Exemplo. Multiplico 630 por 5, diciendo: 5 veces cero es cero; escríbole: 5 veces 3 es 15; escribo 5 y guardo 1; 5 veces 6 es 30, y 1 que guardé, son 31, y les escribo. Ahora he de multiplicar 630 por cero; pongo pues un cero debaxo del cero multiplicador, para principio del producto segundo; y sin hacer otra cosa, paso al producto tercero, diciendo: 2 veces cero es cero; escríbole en la misma línea, y prosigo: 2 veces 3 son 6, y 2 veces 6 son 12, y queda concluida la multiplicacion.

```
 240
  30
----
7200
```

3 Si en el principio de la cantidad ó multiplicador hubiere alguno ó algunos ceros como en el exemplo presente, basta multiplicar los otros guarismos, como si estuvieran solos; y al pro-

producto añadirle tantos ceros como hubiere en la cantidad ó en el multiplicador ó en entrambos juntos. De que se colige, que para multiplicar un número por 10, 100, 1000, &c. basta añadirle tantos ceros como tiene el multiplicador; y así multiplicando 45 por 100, será el producto 4500.

CAPITULO VII.

DEL PARTIR.

Partir un número por otro, es buscar un tercer número que tenga en sí tantas veces la unidad, quantas el número que se parte incluye al otro por quien se parte: como partir 12 por 4 es buscar el número 3 que incluye en sí la unidad tres veces, quantas el 12 incluye al 4. Tambien se puede explicar, diciendo: *Que partir es sacar un número de otro, quantas veces se contiene en él.* Al número que se parte llamaré *cantidad*: á aquel por quien se parte, *partidor* ó *divisor*: y al que sale de la particion, *quociente*.

PROP. V. Problema.

Partir un número por otro.

El modo mas claro de partir un número por otro, es el contenido en las reglas siguientes.

REGLA I.

Quando una cantidad se ha de partir por una sola cifra.

Póngase el partidor apartado de la cantidad sobre una línea; y si esta cifra, que es el partidor, fuere de menor ó igual valor que la última cifra de la cantidad á la mano izquierda, se pondrá un punto entre esta cifra y la que se sigue; pero si la letra del partidor fuere mayor que la última de la cantidad, se pondrá el dicho punto despues de la segunda cifra: y luego se empezará á partir como en los exemplos siguientes.

Exem-

9.693	3
06	3231
09	
03	
0	

Exemplo primero. Se han de partir 9693 entre 3. Puesto el partidor 3 sobre la raya, por ser el 9 mayor que dicho 3, pongo un punto despues del 9, y empiezo á partir, diciendo: 3 en 9 cabe tres veces; escribo 3 debaxo del partidor (que es el lugar del quociente) y le multiplico por el mismo partidor, diciendo: 3 veces 3 son 9; réstoles del 9 de la cantidad, y queda cero; escríbole debaxo el 9. Nótese bien lo hecho hasta ahora, que lo mismo se ha de hacer en las demas cifras.

Para proseguir con claridad, baxo el 6 (que es la cifra que se sigue) y le escribo al lado del primer residuo que fué cero, y le parto por el partidor 3, diciendo: 3 en 6 cabe 2 veces; escribo 2 en el quociente, y les multiplico por el partidor 3, diciendo: 2 veces 3 son 6, que restados de 6, queda cero. Baxo ahora el otro 9 de la cantidad, y le escribo al lado del residuo segundo, que tambien fué cero, y prosigo la particion: 3 en 9 cabe 3 veces; escribo 3 en el quociente, y multiplico el 3 partidor por este 3, diciendo: 3 veces 3 son 9; réstoles de 9, y es el residuo tercero cero: escribo el 3 al lado de este cero, y le parto, diciendo: 3 en 3 cabe una vez; escribo 1 en el quociente: multiplico el partidor 3 por 1, y el producto 3 restado del 3 que se partió, da el residuo cero, y queda concluida la particion, y digo; que 9693 partido entre 3, cabe á cada uno 3231.

17.869	5
28	3573.$\frac{4}{5}$
36	
19	
(4)	

Exemplo segundo. Se ha de partir el número 17869 por 5 ó entre 5. Porque el partidor 5 es mayor que uno, última cifra de la cantidad, se pone el punto despues del 7, y empiezo á partir, diciendo: 5 en 17 cabe tres veces; escribo 3 debaxo del partidor 5, y multiplico, diciendo: 3 veces 5 son 15, hasta 17 de la cantidad van 2; pongo el 2 debaxo del 7, y este es el residuo primero. Escribo el 8 que se sigue otra vez al lado del 2, y quedará rá formado el número 28. Parto 28 por 5 de la misma suerte que ántes partí el 17, y así diré: 5 en 28 cabe 5 veces; escribo 5 en el quociente, y multiplico: 5 veces 5 son 25, que restados de 28, quedan 3, residuo segundo: abaxo el 6 que se sigue en la cantidad, y le escribo al lado del 3, y parto 36 por 5, diciendo: 5 en 36 cabe 7 veces; escribo 7 en el quociente, y multiplico: 7 veces 5 son 35; réstoles de 36, y sobra 1, que es residuo tercero: escribo á su lado el 9 de la cantidad, y parto 19 por 5, diciendo: 5 en 19 cabe 3 veces; escribo este 3 en el quociente, y multiplico: 3 veces 5 son 15, que restándoles de 19, sobran 4; y porque este es el último residuo, le escribo al lado del quociente sobre una raya, y debaxo escribo el partidor como se vé: lo qual significa quatro quintos, como se verá en su lugar.

REGLA II.

Quando una cantidad se ha de partir por un partidor que tiene muchas cifras.

Póngase el partidor sobre una raya como ántes; y sepárense de la cantidad con un punto, tantas cifras quantas tiene el partidor, con tal, que hagan número igual ó mayor que el partidor; porque si hicieren número menor, se ha de tomar un guarismo mas. Supuesta esta disposicion, se comenzará la operacion partiendo la primera cifra de la cantidad por la primera del partidor (ó las dos primeras juntas, si la primera sola no se pudiese partir) exâminando quántas veces cabe esta en aquella: y este número se escribirá en el quociente; y por él se irán multiplicando una por una todas las cifras del partidor, y el producto se irá restando de las cifras correspondientes de la cantidad escribiendo debaxo de ellas los residuos. Esto mismo se hará en las demas letras de la cantidad, como mas claramente se entenderá en el exemplo siguiente.

Exem-

98.35 | 42
143   234. $\frac{7}{42}$
175
(7)

Exemplo. Se ha de partir 9835 por 42. Puesto el partidor 42 sobre la raya, veo que las dos últimas çifras 98 son de mas valor, que las dos del partidor; y así las separo de las demas con un punto, y parto 98 por 42, en esta forma: el 4 del partidor cabe en 9 dos veces; escribo 2 en el quoçiente, y multiplico, diçiendo: 2 veces 2 son 4: réstoles de 8, y quedan 4: prosigo la multiplicacion, diciendo: 2 veces 4 son 8, restados de 9 sobra 1, y es el residuo primero 14. Entiéndase bien lo obrado hasta ahora; porque lo que se sigue es lo mismo sin diferencia.

Báxese ahora el 3, y póngase al lado del residuo 14, y será 143 lo que he de partir por 42; y porque 1 no se puede partir por 4, parto 14 por 4, diciendo: 4 en 14 cabe 3 veces; escribo 3 en el quociente, y multiplico el partidor por este 3, y digo: 2 veces 3 son 6; y porque no se pueden restar del 3, añado una decena, y resto de 13, (*segun la regla 2 del restar, prop. 2.*) y sobran 7: escribo 7 debaxo el 3, y llevo 1 segun la dicha regla del restar; y prosigo la multiplicacion, diciendo: 3 veces 4 son 12, y 1 que llevo, son 13, que restados de 14, sobra 1, que escribo debaxo del 4, y es 17 el residuo segundo.

Escribo el 5 de la cantidad al lado del 17, y será lo que se ha de partir 175, y digo como ántes: 4 en 17 cabe 4 veces; escribo 4 en el quociente, y multiplico el partidor, diciendo: 2 veces 4 son 8; y porque no les puedo restar de 5, añado una decena, y les resto de 15, y sobran 7, que escribo debaxo el 5, y llevo 1. Prosigo la multiplicacion: 4 veces 4 son 16, y 1 que llevo, son 17, que restados de 17, no sobra nada: es pues 7 el último residuo; y digo, que partiendo 9835 entre 42, les cabe á cada uno 234 y $\frac{7}{42}$ avos.

Demonstracion. Segun las reglas sobredichas, partiendo (por exemplo) 48 entre 12, es el quociente 4, el qual, en virtud de las mismas operaciones, expresa, que tantas veces cabe el partidor 12 en 48, quantas la unidad se inclu-

ye

ye en el 4: esto es, partir segun la definicion puesta al principio de este capítulo: luego estas reglas son evidentes; y como de la misma suerte se parta 48 entre 12, que qualquiera otro número mayor por otro qualquiera, como se vió en la práctica antecedente, queda generalmente demonstrada la indefectibilidad de las reglas.

ADVERTENCIAS.

1 Quando la cifra que se baxa de la cantidad, hace con el residuo á quien se junta número menor que el partidor, se pondrá un cero en el quociente; y baxando la otra cifra que se sigue, se hará la particion como ántes.

Exemplo. Por ser la última cifra 1, se distingue con el punto el 18, y digo: 9 en 18 cabe 2 veces; puesto 2 en el quociente, multiplico, diciendo: 2 veces 9 son 18, que restados de 18, no queda nada. Baxo el 2, y veo que por ser menor que 9, no se puede partir: pongo pues un cero en el quociente, y abaxo el 7: parto 27 por 9, y viene 3, y queda concluida la particion.

18.27	9
027	203
0	

2 Algunas veces se ha de tomar por quociente ménos de lo que parece que cabe: lo que es muy ordinario quando la segunda cifra del partidor es grande, como se vé en este exemplo, en que 2 en 9 cabe 4 veces; y no puedo poner en el quociente mas que 3, que siguiendo la regla, da por residuo primero 7, y baxando el 2, prosigo diciendo: el 2 del partidor cabe en 7 tres veces; pero no puedo poner en el quociente mas que 2, que multiplicando el 28, y restando el producto de 72, es el residuo 16.

91.2	28
72	32
(16)	

3 Adviértase, que si en el progreso de la operacion, multiplicando el partidor por la cifra que vino al quociente, el producto fuere mayor que la cantidad que se parte, será señal que se dió mas de lo que se podia: y así se repetirá la operacion dando ménos. Como si partiendo 91 por 28, le diésemos á 4, sería sobrado; porque

que 4 veces 28 hacen mas que 91; y así se repetiria la operacion dándole ménos, hasta que el produćto sea igual ó menor que lo que se parte, con tal que el exceso sea menor que el partidor.

4 La unidad sola, ni multíplicando aumenta, ni partiendo disminuye: de que se infiere, que si se ha de partir algun número por 10, por 100, por 1000, &c. basta quitar de la cantidad tantas cifras de la mano derecha, como tiene ceros la unidad, haciendo quebrado de lo que se quita, como si se ha de partir 253 por 10, será el quociente $25\frac{3}{10}$, y si se parte por 100, será el quociente $2\frac{53}{100}$.

5 Si un número menor se ha de partir por otro mayor, no hay mas que hacer, sino poner la cantidad encima de una línea, y el partidor debaxo en forma de quadrado: como si se ha de partir 18 por 24, será el quociente $\frac{18}{24}$.

PROP. VI. Problema.

Exámen de multiplicar y partir.

La prueba real del multiplicar es partir, y la del partir es multiplicar. Para exâminar pues si la multiplicacion está acertada, pártase el produćto por el multiplicador, y ha de salir la cantidad: ó pártase el produćto por la cantidad, y ha de salir el multiplicador; como multiplicando 124 por 12, es el produćto 1488. Parto este por 12, y salen 124, ó parto el mismo produćto por 124, y salen 12.

Para exâminar si la particion está bien hecha, multiplíquese el quociente por el partidor; y el produćto será la misma cantidad: como partiendo 1488 por 12, fué el quociente 124: multiplico 124 por 12, y saldrá el produćto 1488. Esta prueba es indefećtible: otras hay que omito por la brevedad.

LIBRO II.

DE LA NATURALEZA Y LOGÍSTICA DE LOS QUEBRADOS.

DEFINICIONES.

1 *Fraccion ó número quebrado, es una ó muchas partes de aquellas, en que se considera dividida una unidad*, como quando dividimos la vara en quatro partes iguales: si tomamos una de esas partes, será un quarto de vara; si tomamos dos, serán dos quartos; y si tres, tres quartos: y estos son fracciones ó quebrados. El modo de escribirles, es poner debaxo de una raya el número de las partes en que se considera dividida la unidad; y sobre la raya el número que declara quántas de aquellas partes se toman, como $\frac{1}{4}$ un quarto, $\frac{2}{4}$ dos quartos, &c. El número superior se llama *numerador*; y el inferior, *denominador*.

2 De aquí se infiere, que la misma razon tiene un quebrado con su entero (que es la unidad) que tiene el numerador al denominador, como $\frac{1}{3}$ tiene con la unidad razon subtripla, ó como 1 con 3; y es la razon, porque el 3 es la unidad dividida en tres partes; y no hay duda, que una de esas tres partes, que es la que denota el numerador, tiene razon subtripla con las 3. De que tambien se sigue, que la unidad al quebrado tiene la misma razon que el denominador al numerador.

3 *Fraccion de fraccion, ó quebrado de quebrado*, es una ó muchas partes de un quebrado simple: como $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ quiere decir una mitad de tres quartos: $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{3}{7}$ es dos tercios, de quatro quintos, de tres séptimos. Llámanse *quebrados compuestos*.

La Logística de los quebrados se reduce á *determinacion*, *suma*, *resta*, *multiplicacion* y *particion* de los quebrabrados. Explícase todo en las siguientes proposiciones, repartidas en diferentes capítulos para mayor distincion.

CAPITULO I.

DE LA DETERMINACION DE LOS QUEBRADOS.

COntiene este capítulo los Teoremas que sirven para determinar si dos ó mas fracciones son iguales ú desiguales, y qual de ellas sea mayor.

AXIOMAS.

1 *El denominador de una fraccion siempre vale un entero*; porque no significa otro que un entero dividido en partes.

2 *Si el numerador es igual al denominador, el quebrado vale un entero; si es menor, vale ménos; y si mayor, mas que un entero*: como en estas fracciones $\frac{4}{4}$ ó $\frac{1}{1}$ &c. son cada una un entero: estas otras $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ cada una es menor que un entero; pero en estas $\frac{6}{4}$, $\frac{2}{1}$ vale cada una mas de un entero: consta de lo dicho.

3 *Las fracciones ó quebrados no son otro, que una expresion de la razon que hay entre un todo y alguna ó algunas partes suyas*: tambien consta de lo dicho.

PROP. I. Teorema.

Si el numerador de un quebrado tiene la misma razon con su denominador, que el numerador de otro con su denominador, son los quebrados iguales.

Digo que los quebrados A y B, cuyos numeradores tienen la misma razon con sus denominadores, son iguales. La razon es, porque son una misma parte aliquota de la unidad: luego tiene una misma razon con la unidad: luego (9, 5) son iguales.

A $\frac{2}{4}$ B $\frac{3}{6}$

PROP.

PROP. II. Teorema.

Las fracciones que tienen un mismo denominador, son entre sí como los numeradores.

Sean las fracciones A y B, que tienen un mismo denominador. Digo que tienen entre sí la razon misma de sus denominadores 6 con 3. La razon es, porque siendo los denominadores iguales, toda la desigualdad de las fracciones proviene de la desigualdad de los numeradores: luego las fracciones tendrán la misma razon de sus numeradores.

$A\frac{6}{16}$ $B\frac{3}{16}$

PROP. III. Teorema.

Los quebrados que tienen un mismo numerador, se han entre sí recíprocamente como los denominadores.

Los quebrados A y B tienen un mismo numerador 2. Digo que tienen entre sí la razon de sus denominadores, pero recíproca; esto es, que el quebrado A al quebrado B, es como 6 denominador de B, con 3 denominador de A.

$A\frac{2}{3}$ $B\frac{2}{6}$

Demonstracion. La fraccion A con la unidad, se ha como 2 con 3. (*def.* 2) Tambien la unidad con el quebrado B, se ha como 6 con 2: luego por razon perturbada (5) será la fraccion A á la fraccion B como 6 con 3.

$A\frac{2}{3}$ 1 $B\frac{2}{6}$ 6 2 3

PROP. IV. Teorema.

Aquel quebrado es mayor, cuyo numerador tiene mayor razon á su denominador.

Sean los quebrados A y B; y la razon del numerador 5 á su denominador 6, es mayor que la de 1 á 2. Digo que el quebrado A es mayor que B.

$A\frac{5}{6}$ $B\frac{1}{2}$

Demonstracion. La misma razon tiene el quebrado á la unidad, que el numerador al denominador: luego el quebrado, cuyo numerador tiene mayor razon á su denominador, tiene mayor razon á la unidad: luego es mayor parte de la unidad, y por consiguiente es mayor.

PROP. V. Teorema.

Los quebrados tienen entre sí la misma razon, que los productos de la multiplicacion en cruz de los numeradores, por los denominadores.

$$\begin{array}{ccc} 24 & & 12 \\ A\,\frac{3}{6} & \times & \frac{2}{8}\,B \\ & 48 & \end{array}$$

Sean los quebrados A y B. Multiplicando el numerador 3 por el denominador 8, sale el producto 24: multiplicando el numerador 2 por el denominador 6, sale el producto 12. Digo que la misma razon tiene el quebrado A al quebrado B, que 24 á 12; esto es, que así como 24 es doblado de 12, así el quebrado A es doblado de B.

Preparacion. Multiplíquense entre sí los denominadores 6 y 8, y será el producto 48.

Demonstracion. El 6 multiplicando al 2 y al 8 produce 12 y 48: luego (como demuestra Eucl. en la *prop*. 17 *lib*. 7) la misma razon tendrá 12 con 48, que tiene 2 con 8: luego los quebrados $\frac{2}{8}$ avos, y $\frac{12}{48}$ avos son iguales. (1) Asimismo el 8 multiplicando al 3 y al 6 produce 24 y 48, que tendrán la misma razon, que 3 á 6: luego los quebrados 3 sextos, y $\frac{24}{48}$ avos son iguales: pues porque los quebrados $\frac{24}{48}$ avos, y $\frac{12}{48}$ avos tienen un mismo denominador, tienen entre sí (2) la razon de los numeradores 24 á 12: luego sus iguales 3 sextos y 2 octavos tienen entre sí la razon de 24 á 12.

PROP. VI. Problema.

Determinar la magnitud de los quebrados.

Multiplíquense los denominadores y numeradores en cruz: y si los productos fueren iguales, serán los quebrados iguales;

les; pero si los productos fueren desiguales, los quebrados serán desiguales: y aquel quebrado será mayor, cuyo numerador, multiplicando al denominador opuesto, produxere mayor número. Consta de lo dicho.

CAPITULO II.

DE LA REDUCCION DE LOS QUEBRADOS.

LA reduccion de los quebrados consiste en una mutacion de unos en otros, conservando el mismo valor.

PROP. VII. Problema.

Hallar la mayor medida comun de dos números.

Supongo lo primero, que *medir un número á otro*, se dice quando es parte aliquota suya, y por consiguiente le parte igualmente; como el 2 es medida del 6, porque tomando tres veces, hace justamente 6, y si se parte 6 por 2, viene la particion justa: con que *medida comun de dos números*, es el número que es parte aliquota de entrambos, ó que les parte igualmente, como 2 es medida comun de 8 y 10, porque es parte aliquota de entrambos: y si el 8 y el 10 se parten por 2, sale la particion justa.

2 *Número primo*, es aquel que solo es medido de la unidad, como 2, 3, 5, 7. *Número compuesto*, es aquel á quien mide otro número ademas de la unidad, como el 12, á quien demás de la unidad, mide el 2, 3, 4, 6.

3 *Números entre sí primos*, son aquellos que no tienen otra medida comun mas que la unidad, como 8 y 11. *Números entre sí compuestos*, son los que tienen alguna medida comun á mas de la unidad, como 8 y 10, á quienes mide el 2. Hallaráse pues la mayor medida comun de dos números propuestos, del modo siguiente.

Operacion. Pártase el número mayor por el menor, y si sobra algo, pártase el número menor por lo que sobró; y si de esta segunda particion sobra algo, pártase el primer residuo por el segundo: y de esta suerte se continuará hasta que sobre cero ó unidad. Si sobra 1, es señal que los tales números no tienen otra medida comun mas que la unidad, y por consiguiente son entre sí primos. Si queda cero, el último partidor será la mayor medida comun. *Exemplo*. Sean los números 25 y 15: partiendo 25 por 15, sobran 10: partiendo 15 por 10, sobran 5: partiendo 10 por 5, sobra cero. Digo pues, que 5 es la mayor medida comun de 25 y 15.

Demonstracion. Porque partiendo 10 por 5 viene la particion justa, es cierto, que el 5 mide al 10: luego tambien mide al 15, que es el agregado de 10 y de 5: luego tambien mide al 25, que es agregado de 10 y 15: luego 5 es medida comun de 25 y 15, y es la mayor de todas, porque en las particiones se dió lo mas que se pudo dar.

PROP. VIII. Problema.

Hallar la mayor medida comun de mas de dos números.

Hácese por la misma regla en esta forma. Sean los números 18, 34, 42. Hállese por la proposicion antecedente la mayor medida comun de 18 y 34, y se hallará 2. Búsquese asimismo la mayor medida comun de 2 y 24, y se hallará 2. Digo que 2 es la mayor medida comun de los tres números propuestos. La demonstracion es la misma.

PROP. IX. Problema.

Reducir un quebrado á los mínimos términos.

Búsquese (7) la mayor medida comun del numerador y denominador, y por ella pártanse los dos. Digo que si el quociente del numerador se pone sobre una raya, y el quociente del denominador debaxo, este nuevo quebrado será el mismo que se propuso, y estará reducido á los mínimos términos: como si el quebrado fuere $\frac{15}{25}$ avos. Hallada la mayor medida comun, será 5; partiendo 15 por 5, es el quociente 3 numerador del nuevo quebrado: y partiendo 25 por 5, será el quociente 5 denominador del quebrado reducido, que será 3 quintos.

De-

Demonstracion. Partiendo el numerador y denominador por un mismo número, los quocientes quedan con la misma proporcion: luego (1) queda el mismo quebrado; y por partirse por el mayor partidor que es posible, salen los quocientes los menores que son posibles: luego está reducido á los mínimos términos.

De esta misma suerte se reduce una razon á los mínimos términos.

PROP. X. Problema.

Reducir los quebrados á un comun denominador.

Si los quebrados son dos, multiplíquese el denominador del uno por el denominador del otro, y el producto será el denominador comun. Multiplíquese despues en cruz el numerador del uno por el denominador del otro, y los productos serán los numeradores nuevos.

Exemplo. Sean los quebrados A y B, que se han de reducir á otros dos que sean iguales á ellos y tengan un mismo denominador. Multiplíquense los denominadores 4 por 6, y el producto 24 es el comun denominador: multiplico despues en cruz 3 por 6, y el producto 18 es el numerador del primero; y multiplicando 5 por 4, el producto 20 es el numerador del segundo; y digo, que $\frac{18}{24}$ avos, es lo mismo que 3 quartos, como tambien $\frac{20}{24}$ avos, es lo mismo que 5 sextos, y tienen un mismo denominador. *La demonstracion es la misma que la de la* propos. 5.

$$\begin{array}{ccc} 18 & & 20 \\ A\,\frac{3}{4} & \times & \frac{5}{6}\,B \\ & 24 & \end{array}$$

Si los quebrados que se han de reducir fueren mas que dos, se multiplicará el denominador primero por el segundo, y el producto por el tercero, &c. y el último producto será el comun denominador. Para hallar los numeradores nuevos, multiplíquese el numerador de cada quebrado por los denominadores de los otros quebrados, no por el propio, y el producto será el numerador nuevo y propio de cada uno.

Exem-

Exemplo. Se han de reducir los tres quebrados presentes. Multiplico los denominadores 3 por 4, y el produćto por 5, y sale el denominador comun 60. Multiplico ahora el numerador 2 por los denominadores 4 y 5, diciendo: 2 veces 4 son 8, y otra vez: 8 veces 5 son 40, y este es el primer numerador.

$$\begin{array}{ccc} 40 & 45 & 48 \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} \\ & 60 & \end{array}$$

Asimismo multiplico el numerador 3 por los denominadores 3 y 5, y digo: 3 veces 3 son 9, y 5 veces 9 son 45, numerador segundo. Multiplico el numerador 4 por los denominadores 3 y 4, diciendo: 3 veces 4 son 12, y 4 veces 12 son 48, y este es tercero numerador.

Aunque esta operacion parece algo diferente de la pasada; pero en realidad es la misma, y tiene la misma demonstracion.

De esta misma suerte se reducirán muchas razones á un mismo conseqüente; porque se formará de los dos términos de cada una un quebrado, poniendo el antecedente de cada razon sobre la raya como numerador, y el conseqüente debaxo como denominador.

PROP. XI. Problema.

Reducir un quebrado á un denominador determinado.

Multiplíquese el numerador del quebrado por el nuevo denominador que se pide: y el produćto pártase por el denominador primero; y el quociente será el nuevo numerador.

Exemplo. Pídese, que dos tercios se reduzgan á otro quebrado igual, que tenga por denominador al 9, que es lo mismo que pedir ¿2 tercios quántas novenas sean del mismo entero? Multiplico 9 por 2, y parto el produćto 18 por 3, y el quociente 6 será el numerador; y así $\frac{6}{9}$ avos, es lo mismo que 2 tercios.

Demonstracion. Esta práćtica consiste en hallar por regla de tres un quarto número proporcional, diciendo: si 3 dan 2, luego 9 darán 6, lo que sin dependencia de esto se demonstrará en su lugar: luego la misma razon hay de 6 á 9, que de 2 á 3: luego (1) dichos quebrados son iguales.

Ad-

Adviértase, que quando en la particion sobredicha sobrare algo, esto que sobrare será quebrado de una parte del quebrado que salió por la reduccion: como si 2 quintos se han de reducir á octavos, salen 3 octavos, y un quinto de octavo. *De esta proposicion sale la resolucion del Problema siguiente.*

PROP. XII. Problema.

Hallar el valor de un quebrado.

Hallar el valor de un quebrado, es saber lo que vale en alguna especie determinada. Como para saber 3 quintos de libra, moneda de Valencia, quánto valen; porque la libra consta de 20 sueldos, es lo mismo que pedir se reduzgan 3 quintos á partes vigésimas; esto es, á un quebrado que tenga denominador al 20. Obrese pues (*por la anteced.*) multiplicando 20 por 3, y el producto 60 pártase por 5, y se hallará, que 3 quintos de libra son $\frac{12}{20}$ avos de libra, esto es, 12 sueldos. De la misma manera se obrará en otra qualquiera especie.

PROP. XIII. Problema.

Reducir el quebrado compuesto á simple.

Multiplíquese numerador por numerador, y el producto será el nuevo numerador. Multiplíquese denominador por denominador, y el producto será el nuevo denominador; y el quebrado formado nuevamente, será el quebrado simple que se busca.

Exemplo. El quebrado compuesto A, se ha de reducir á simple. Multiplico pues los numeradores: 2 veces 3 son 6, y una vez 6 es 6; este es el numerador nuevo. Multiplico asimismo los denominadores: 3 veces 4 son 12, y 2 veces 12 son 24, nuevo denominador. Digo pues que el quebrado compuesto A, queda reducido á B.

A	B
$\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{2}$	$\frac{6}{24}$

Demonstracion. Para mayor facilidad, supóngase el quebrado compuesto C reducido por la regla dicha al sencillo D. Los 2 tercios son de 3 quartos:

C	D
$\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$	$\frac{6}{12}$

tos: luego si los 3 quartos se dividen en tres partes, y de esas se toman dos, se tendrá el intento. Multiplicando pues el denominador 4 por el denominador 3, se forma otro quebrado, que es $\frac{3}{12}$ avos, que es una tercera parte de 3 quartos: (3) luego si $\frac{3}{12}$ avos se toman dos veces, que se hace multiplicando el numerador 3 por el numerador 2, el producto $\frac{6}{12}$ avos son los dos tercios de los 3 quartos.

PROP. XIV. Problema.

Reducir los enteros á quebrados, y los quebrados á enteros.

Lo primero. Los enteros se reducen á quebrados, multiplicándoles por el denominador del quebrado; y el producto será el numerador. Quiero reducir 5 enteros á quartos; multiplico 5 por 4, y el producto 20 es el numerador, y quedan 5 enteros reducidos á 20 quartos.

Lo segundo. Los quebrados se reducen á enteros, partiendo el numerador por el denominador; y el quociente serán los enteros. Como, quiero reducir 20 quartos á enteros; parto 20 por 4, y sale el quociente 5 enteros. Si sobra algo, se dexa por quebrado: como 48 quintos se han de reducir á enteros, parto 48 por 5, y hallo que son 9 enteros y 3 quintos. La razon es clara, y no hay necesidad de demonstracion.

CAPITULO III.

DE LA SUMA, RESTA, MULTIPLICACION y particion de los quebrados.

PROP. XV. Problema.

Sumar quebrados.

Primero. Si los quebrados tienen un mismo denominador, súmense los numeradores; y la suma de estos será numerador de un quebrado, á quien dándole el mismo denominador, será la suma de los quebrados: como la suma de 2 séptimos y 3 séptimos, es 5 séptimos.

Se-

Segundo. Si los quebrados tienen diferente denominador, redúzganse (10) á un comun denominador, y súmense los numeradores. Como 2 tercios y 3 quartos, reducidos son 8 dozavos y 9 dozavos, y será la suma de los quebrados 17 dozavos. Si se ofreciere sumar quebrados compuestos, redúzganse primero á simples, y hágase la misma regla. Es claro, y no necesita de demonstracion.

De esta misma suerte se sumarán diferentes razones, formando de ellas quebrados, como dixe á lo último de la proposicion 10.

PROP. XVI. Problema.

Restar quebrados.

Quatro cosas se pueden ofrecer. 1 *Restar un quebrado de otro.* 2 *Restar un quebrado de muchos.* 3 *Restar quebrado de enteros.* 4 *Restar enteros y quebrados de enteros y quebrados.*

1 Para restar un quebrado de otro, redúzganse ámbos á un comun denominador, (si le tienen diferente) y réstese el numerador menor del mayor: como si se ha de restar el quebrado A del quebrado B, reducidos á un denominador 12, serán los quebrados C y D: réstese el numerador 8 del numerador 9, y el residuo un dozavo será la resta.

A $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ B

C $\frac{8}{12}$ $\frac{9}{12}$ D

2 Si un quebrado se ha de restar de muchos, redúzganse todos á un comun denominador; y réstese el uno de la suma de los otros. Como si una mitad se hubiere de restar de la suma de un tercio, y dos quintos: reducidos todos á un comun denominador, serán $\frac{15}{30}$ avos, $\frac{10}{30}$ avos, y $\frac{12}{30}$ avos: súmense los dos últimos, y será la suma $\frac{22}{30}$ avos: réstense $\frac{15}{30}$ avos de $\frac{22}{30}$ avos, y será la resta $\frac{7}{30}$ avos.

Si se ofreciere restar enteros y quebrados de un número entero, basta restar el numerador del quebrado de su denominador, y poner la resta por numerador del nuevo quebrado, y llevar uno para añadir al entero siguiente,

que

Debe	24	
Paga	$3\frac{4}{9}$	
Resta	$20\frac{5}{9}$	

que se ha de restar. Como en este exemplo: Si de 9 se quita el numerador 4, quedan 5, que con el mismo denominador es 5 novenas, y llevo 1, que junto con el 3 hace 4; restados de 24, quedan 20, y es la resta 20 y 5 novenas.

4 Para restar enteros y quebrados de enteros y quebrados, redúzganse los quebrados á un comun denominador; y si el quebrado de la deuda es mayor que el que se ha de restar, réstese el un quebrado del otro, como en el número 1. *Exemplo.* El quebrado de la deuda reducido, es $\frac{45}{54}$ avos, y el de la paga es $\frac{24}{54}$ avos: réstense pues 24 de 45, y será la resta $\frac{21}{54}$ avos: réstense los tres enteros de los 24, y restan 21, y es toda la resta 21 y $\frac{21}{54}$ avos.

Debe	$24\ \frac{5}{6}$	$\frac{45}{54}$
Paga	$3\ \frac{4}{9}$	$\frac{24}{54}$
Resta	21	$\frac{21}{54}$

Pero si hecha la reduccion de los quebrados, se hallare que el quebrado de la paga es mayor que el de la deuda, réstese el numerador mayor del denominador, y el residuo se añadirá al numerador menor; y lo que resultare será el numerador del quebrado de la resta, y se guardará un entero para juntarle con los enteros siguientes, que se han de restar.

Exemplo. Reducidos los quebrados de la deuda y paga á un comun denominador, se halla ser el de la deuda $\frac{8}{12}$ avos, y el de la paga $\frac{9}{12}$ avos; y porque este es mayor que aquel, resto 9 de 12, y sobran 3, que añadidos al numerador 8, hacen 11, que son $\frac{11}{12}$ avos, y llevo un entero, que junto con el 3, es 4; resto 4 de 12, y sobran 8, y queda hecha la resta.

Deuda	$12\ \frac{2}{3}$	$\frac{8}{12}$
Paga	$3\ \frac{3}{4}$	$\frac{9}{12}$
Resta	8	$\frac{11}{12}$

Si en los casos sobredichos hubiere quebrados compuestos, redúzganse á sencillos, y se obrará con las mismas reglas. La demonstracion es la misma que del restar enteros.

De

De la misma manera que en el núm. 1 *se restó un quebrado de otro, se resta una razon menor de otra mayor.*

PROP. XVII. Problema.

Multiplicar quebrados.

Tres dificultades pueden ocurrir. 1. *Multiplicar quebrado por quebrado.* 2. *Multiplicar quebrado por entero.* 3. *Multiplicar entero y quebrado por entero y quebrado.*

1 Para multiplicar un quebrado por otro, multiplíquese el un numerador por el otro y el un denominador por el otro, y el nuevo quebrado será el producto. Como si se han de multiplicar los quebrados A por B, multiplico los numeradores 2 por 3, y el producto 6 será numerador del nuevo quebrado. Multiplico los denominadores 3 por 4, y el producto 12 es el nuevo denominador; y todo el producto es 6 dozavos.

A $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ B | $\frac{6}{12}$ C

Demonstracion. Multiplicar 4 enteros por 3 enteros, es buscar quánto sea el quarto tomado 3 veces; pues asimismo multiplicar 2 tercios por 3 quartos, es buscar quánto sean los 3 quartos de 2 tercios, que es lo mismo que reducir un quebrado compuesto á sencillo; y así usamos de la misma regla.

2 Para multiplicar un quebrado por número entero, se multiplicará el numerador por el entero, y al producto se le pondrá el mismo denominador. Como si se han de multiplicar 3 quartos por 2, se multiplicará el numerador 3 por 2, y será el producto 6 quartos, que reducidos á enteros (14) será el producto 1 y 2 quartos.

Para multiplicar un quebrado por un número igual á su propio denominador, basta borrar el denominador, y dexar el numerador como entero: y así para multiplicar 3 quartos por 4, basta quitar el denominador 4, y el producto será 3 enteros. La razon es clara, porque multiplicando 3 quartos por 4, salen 12 quartos, que reducidos á enteros (14) son 3 enteros.

Pa-

4 Para multiplicar enteros y quebrados por enteros y quebrados, se reducirán los enteros á quebrados: cada entero á la especie de quebrados que le acompaña; (14) y se obrará como en el *num.* 1.

A $3\frac{2}{3}$

B $5\frac{3}{4}$

C $\frac{11}{3}$ D $\frac{23}{4}$ | E $\frac{253}{12}$

Exemplo. Se ha de multiplicar A por B: reducido A á la especie de su quebrado, es C: y reducido B á la especie de su quebrado, es D. Y multiplicando (*num.* 1) numerador por numerador, y denominador por denominador, será el producto E.

De esta manera se hace la composicion de diferentes razones por multiplicacion, como dixe en la Geometría Elem. en la def. 13 *del* lib. 5.

PROP. XVIII. Problema.

Partir quebrados.

Quatro casos pueden ocurrir. 1 *Partir quebrado por quebrado.* 2 *Partir entero por quebrado, y al contrario.* 3 *Partir entero y quebrado por entero solo.* 4 *Partir entero y quebrado por entero y quebrado.*

1 Para partir quebrado por quebrado, póngase á la mano izquierda de quien escribe el quebrado que se ha de partir; y al lado de este á la derecha el quebrado partidor: y multiplíquese en cruz el numerador del primero á la izquierda por el denominador del segundo; y el producto escríbase al lado sobre una raya, y este será el numerador del quebrado quociente. Multiplíquese despues el denominador del primero por el numerador del segundo, y el producto escríbase debaxo de la raya; y este será el denominador del quociente, y estará concluida la operacion.

A $\frac{3}{4} \bowtie \frac{2}{3}$ B $\bowtie \frac{9}{8}$ C

Exemplo. El quebrado A se ha de partir por el quebrado B: escritos como se vé, multiplico el numerador de A que es 3, por el denominador de B que tambien es 3, y el producto 9 es numerador del quociente C. Mul-

Multiplico asimismo el denominador de A que es 4, por el numerador de B que es 2, y el producto 8 es el denominador del quebrado C, que es el quociente que se busca.

Demonstracion. De lo dicho al principio del *cap*. 7 del *lib*. 1 consta, que partir, es buscar un número que explique quántas veces se incluye el partidor en el dividendo: con que tantas veces este incluye al partidor, quantas el quociente á la unidad: luego (*def*. 5) son proporcionales el dividendo al partidor, como el quociente á la unidad; y así partiendo 8 por 4 es el quociente 2, y son proporcionales 8, 4, 2, 1: luego si yo pruebo, que la misma razon hay del quebrado A al quebrado B, que del quebrado C á la unidad, quedará demonstrada la regla. Pruébolo así.

El numerador 9 y el denominador 8 del quebrado quociente C, han sido producidos de la multiplicacion en cruz de los términos del quebrado dividendo A, por los del divisor B: luego (5) la misma razon hay del dividendo A al divisor B, que 9 á 8. La razon del numerador 9 al denominador 8, es la misma que tiene el quebrado C á la unidad: (*def*. 2) luego el quebrado A al quebrado B, es como el quebrado C á la unidad.

2 Si se ha de partir entero y quebrado por entero solo, ó al contrario, redúzgase el entero al quebrado que le acompaña, (14) y hágase la division como ántes: como si se han de partir 10 y 2 tercios por 8, reducidos los enteros, son 32 tercios, y el entero partidor puesto en forma de quebrado, será 8 enteros; y hecha la multiplicacion en cruz como ántes, será el quociente $\frac{32}{24}$ avos. Asimismo, para partir 8 por 2 y 5 sextos, reducidos los enteros, son 8 enteros y 17 sextos, y hecha la particion, es el quociente $\frac{48}{17}$ avos.

$$\frac{32}{3} \times \frac{8}{1} \times \frac{32}{24}$$

3 Para partir enteros y quebrados por enteros y quebrados, se reducirán los enteros á los quebrados que les acompañan, y quedarán como dos quebrados: y se hará la particion como en el *num*. 1.

Exemplo. 3 y 2 quintos se han de partir por 2 y 3 quar-

$\frac{17}{5} \bowtie \frac{11}{4} \bowtie \frac{68}{55}$ quartos: reducidos los enteros á los quebrados, quedan dispuestos como se vé en el exemplo; y hecha la particion, es el quociente $\frac{68}{55}$ avos.

4 De lo dicho se colige el modo de partir enteros solo por quebrado, ó al contrario.

PROP. XIX. Problema.

Exámen de la Logística de los quebrados.

El exámen del sumar es el restar: si de la suma de dos quebrados se resta el uno, la resta ha de ser igual al otro quebrado.

El exámen del restar es el sumar: si hecha la resta, sumamos el residuo con el quebrado menor, la suma ha de ser igual al quebrado mayor.

El exámen del multiplicar es el partir: si se parte el quebrado que salió de la multiplicacion por uno de los quebrados que se multiplicáron, el quociente ha de ser igual al otro quebrado.

El exámen del partir es el multiplicar: si el quebrado que salió por quociente, se multiplica por el quebrado que sirvió de partidor, el producto será igual al otro quebrado. Es claro, y no hay necesidad de exemplos.

ESCOLIO.

Antes de pasar adelante conviene satisfacer una duda que suele ofrecerse á los principiantes, y es: ¿Por qué razon, quando multiplicamos por enteros, siempre el producto es mayor, que lo que se multiplica; como si multiplicamos 8 *por* 2, *es el producto* 16; *y quando multiplicamos por quebrado, sale el producto menor que lo que se multiplica; como si multiplicamos* 8 *por* 1 *quarto, es el producto* 8 *quartos, que es lo mismo que* 2 *enteros?*

Respondo fácilmente, que como el multiplicar consista en tomar tantas veces la cantidad que se multiplica, quantas tiene unidades el multiplicador; por eso quando el multiplicador es entero (que consta de unidades) se toma mu-

chas veces la cantidad que se multiplica, como el 8 *se toma* 2 *veces quando le multiplicamos por* 2; *y así el producto* 16 *es necesariamente mayor que el* 8 : *pero quando el multiplicador es ménos que unidad, como lo es qualquiera quebrado, se toma lo que se multiplica ménos que una vez; y así es forzoso sea el producto menor que lo que se multiplica, como quando multiplicamos* 8 *por* 1 *quarto, tomamos la quarta parte de* 8, *y así el producto es* 2, *como quando el multiplicador es* 1, *se toma una vez la cantidad. De que se infiere, que multiplicar por quebrado ó por la unidad, no es propiamente multiplicar; y lo mismo se ha de decir del partir respectivamente.*

LIBRO III.

DE LA LOGÍSTIGA DE LOS NÚMEROS DENOMINADOS.

NUmeros denominados, son los que numeran cosas de diferentes especies, como libras, sueldos, dineros, reales, arrobas, &c. Su Logística se comprehende en las proposiciones siguientes.

PROP. I. Problema.

Sumar números denominados.

Regla general. 1 Escríbanse las especies que se han de sumar, cada una debaxo de su semejante, con tal órden, que la especie de mayor valor esté á la izquierda, y la de menor valor á la derecha.

2 Comiéncese á sumar la especie de menor valor; y en llegando á hacer el número que constituye ó iguala á la

la especie inmediata hácia la izquierda, se hará (si importare para la memoria) un señal al lado, tantas veces, quantas llegare á la especie siguiente; y lo que sobrare se escribirá debaxo. Despues se llevarán tantas unidades, como señales hubiere, para juntarlas con la coluna de la especie siguiente, la qual se sumará del mismo modo. La suma de la última coluna se hará como en los enteros.

A 124 lib.	15 suel.	9	
B 113 lib.	12 suel.	10	
C 15 lib.	4 suel.	8	
D 253 lib.	13 suel.	3	

Exemplo 1. Se han de sumar las partidas A, B, C, de moneda de Valencia. Sumo primero los dineros, diciendo: 9 y 10 son 19 dineros; esto es, 1 sueldo y 7 dineros: pongo pues un señal, y los 7 que sobran con los 8 siguientes, son 15; esto es, 1 sueldo y 3 dineros: pongo otro señal, y escribo el 3 debaxo la raya. Y paso á sumar los sueldos, llevando 2 por otros tantos señales, y digo: 2 y 5 son 7, y 2 son 9, y 4 son 13: escribo 3, y llevo una decena, y sumándola con las otras decenas de los mismos sueldos, hallo tres decenas, que son 30 sueldos; y porque los 20 sueldos hacen una libra: escribo una decena, y llevo 1 libra para sumarla con ellas, y así digo: 1 que llevo, 4, 3 y 5 hacen 13: escribo 3, y llevo 1, que con 2, 1 y 1 hacen 5, y 1 y 1 hacen 2, y es toda la suma la que se vé en D.

Exemplo 2. Se han de sumar las partidas siguientes de peso de Valencia, segun lo referido en el *cap.* 2 del *lib.* 1.

28 carg.	2 quint.	1 arr.	18 lib.	8 onz.	3 quart.	2 adar.	20 gr.
27 carg.	2 quint.	3 arr.	26 lib.	9 onz.	2 quart.	3 adar.	19 gr.
56 carg.	2 quint.	1 arr.	15 lib.	6 onz.	2 quart.	2 adar.	3 gr.

Sumo primero los granos, y hallo ser 39, que son 1 adarme y 3 granos; escribo 3, y llevo 1 adarme, que sumado con los otros, son 6 adarmes; esto es, 1 quarto y 2 adarmes: escribo 2, y llevo 1 quarto, que con los otros, hacen 6 quartos, que son 1 onza y 2 quartos: escribo 2,

y

y llevo 1 onza, que junta con las demas, son todas 18 onzas; esto es, una libra y 6 onzas: escribo 6, y llevo 1 libra, que sumada con las otras, son 45 libras; esto es, 1 arroba de 30 lib. y 15 libras: escribo pues 15, y llevo 1 arroba, que con las demas suma 5 arrobas, que son 1 quintal y 1 arroba: escribo 1, y llevo 1 quintal, que con los otros suma 5 quintales; esto es, 1 carga y 2 quintales: escribo 2, y llevo 1 carga, que con las demas hace 56, y está concluida la suma.

Exemplo 3. Para hacer la siguiente suma y otras semejantes, se ha de suponer lo que dixe en la *Geom. Elem. lib.* 1 *defin.* 12, que el círculo consta de 360 grados, 1 grado de 60' minutos, 1 minuto de 60" segundos, &c. Comienzo la suma por los segundos: 5 y 9 son 14; escribo 4, y llevo 1 decena: 1 que llevo, 4 y 3 son 8, y porque 6 decenas de segundos hacen 1 minuto, escribo 2, y llevo 1; este 1 que llevo, y 2 y 8 son 11; escribo 1, y llevo 1, que con el 5 y 4 son 10; y porque 6 decenas de minutos hacen un grado, escribo 4, y llevo 1 grado, que con los 40 y 60 hacen 101, y queda hecha la suma.

Grados.	Minut.	Segundos.
40	52'	45"
60	48'	39"
101	41'	24"

PROP. II. Problema.

Restar números denominados.

Regla general. Escrita la partida menor debaxo de la mayor con la misma correspondencia y órden que se dixo en la proposicion pasada, se comenzará la resta por la especie menor, restando el número inferior del superior; y si no se pudiere, por ser el número inferior mayor que el superior, se tomará la diferencia del número inferior á la especie mayor siguiente: esta diferencia sumada con el número superior se escribirá debaxo de la raya, llevando 1, para juntarlo con el número inferior de la especie inmediata siguiente.

Exemplo 1. Porque 9 es mayor que 8, y 12 dineros

Deuda	36 lib.	4 sueld.	8-
Paga	2 lib.	13 sueld.	9-
Resta	33 lib.	10 sueld.	11

hacen un sueldo, digo: de 9 hasta 12 van 3, y 8 de arriba son 11; escribo 11, y llevo 1 sueldo, que junto con los 13 sueldos hace 14; y porque 4 es ménos que 14, y 20 sueldos hacen una libra, digo: de 14 á 20 van 6, y 4 de arriba son 10; escribo 10, y llevo 1 libra, que junta con las 2 hace 3; estas 3 restadas de 36, restan 33, y queda hecha la resta.

Exemplo 2. en pesos de Valencia. Porque 9 es mayor que 7, y 12 onzas hacen una libra, digo: de 9 á 12 van 3, y 7 son 10, que escribo en su lugar, y llevo 1 libra, que con las 20 hace 21; y porque es mas que el 16, y la arroba gruesa tiene 36 libras, digo: de 21 á 36 van 15, y 16 de arriba son 31, que escribo en su lugar, y llevo 1 arroba, que con la 1 hacen 2, que quitadas de 2, no queda cosa alguna, y queda concluida la resta.

Arrob.	libr.	onzas.
2	16	7
1	20	9
0	31	10

Exemplo 3. en grados, minutos y segundos. Porque 4 es ménos que 6, digo: de 6 á 10 van 4, y 4 de arriba son 8; escribo 8, y llevo 8, que con 3 son 4; y porque 2 de arriba es ménos que 4, y el minuto consta de 6 decenas de segundos, digo: de 4 á 6 van 2, y 2 de arriba son 4; escribo 4, y llevo 1 minuto, que con 5 hace 6; y porque 2 es ménos que 6, digo: de 6 á 10 van 4, y 2 son 6, y llevo 1 decena, que junta con 1 hace 2; y porque el 1 de arriba es ménos que 2, y 6 decenas de minutos hacen 1 grado, digo: de 2 á 6 van 4, y 1 son 5; escribo 5, y llevo 1 grado, que restado de 5, quedan 4; escribo 4, y restando 3 del 4 de arriba, resta 1, y queda acabada la operacion.

Grados,	Minut.	Segund.
45	12'	24"
30	15'	36"
14	56'	48"

PROP.

PROP. III. Problema.
Reduccion de diferentes especies.

Regla primera. Para reducir las cosas de especie superior ú de mayor valor á otras de especie inferior ú de menor valor, se observará lo siguiente: Primero, véase quántas cosas de la especie inferior componen una de la superior. Segundo, multiplíquese el número dado de la especie superior, por el número que expresa, quántas de la especie inferior hacen una de la superior; y el producto será la reduccion que se pretende.

Exemplo 1. Se han de reducir 48 lib. moneda de Valencia á sueldos: porque 20 sueldos hacen 1 lib. multiplico 48 por 20, y el producto 960 sueldos es la reduccion que se desea.

Exemplo 2. Pídese, que los sobredichos 960 sueldos se reduzgan á dineros: pues porque 12 dineros componen 1 sueldo, multiplico 960 por 12, y el producto 11520 dineros es lo que se pide.

Si muchas especies se hubieren de reducir á la ínfima, se obrará como en este *exemplo* 3. Pídese, que 36 lib. 12 sueldos 8 dineros se reduzgan á dineros. Multiplíquense las 36 lib. por 20, y es el producto 720 sueldos; añádanse á estos los 12 sueldos, y son todos 732 sueldos. Multiplíquense ahora estos 732 sueldos por 12, y es el producto 8784 dineros, que con los 8 dineros son 8792 dineros; y queda hecha la reduccion.

Regla segunda. Para reducir las cosas de inferior especie ó menor valor á las de mayor valor, se partirá el número de las dichas cosas de menor valor por el número que declara, quántas de ellas componen una de las de mayor valor, y el quociente será la reduccion que se busca.

Exemplo 1. Pídese, que 11520 dineros se reduzgan á sueldos; porque 12 dineros hacen 1 sueldo, parto 11520 por 12, y el quociente 960 sueldos es la reduccion que se pide.

Exemplo 2. Si se quiere que los 960 sueldos se reduzgan á libras; porque cada libra consta de 20 sueldos, parto 960 por 20, y el quociente serán 48 libras.

Exemplo 3. 8792 din. se han de reducir á libras. Redúzgoles primero á sueldos, partiéndoles por 12, y el quociente es 732 sueld. y 8 din. Reduzgo los 732 sueld. á lib. partiéndoles por 20, y el quociente es 36 lib. 12 sueld. con que los 8792 din. son 36 lib. 12 sueld. 8 din. Lo mismo se observará en la reduccion de pesos, medidas, &c.

PROP. IV. Problema.

Multiplicar números denominados.

Este problema se puede resolver de muchas maneras; y las principales dificultades que pueden ocurrir, se reducen á dos, es á saber: multiplicar una especie por muchas; y multiplicar muchas especies por muchas.

DIFICULTAD I.

Multiplicar una especie por muchas.

MODO I.

Multiplíquese la cantidad por la especie mas alta del multiplicador. Véase el número de la especie menor, qué parte ó partes sea de la especie mayor, y se tomará de la cantidad semejante parte ó partes, y sumándolas con el producto antecedente, se sabrá el valor que se busca.

24 Varas.
4 lib. 10 sueld.
96 lib.
12 lib.
108 lib.

Exemplo 1. Quiero saber quánto valen 24 varas de paño á 4 lib. y 10 sueld. la vara. Multiplico las 24 varas por las 4 lib. y salen 96 lib. Y porque 10 sueld. son la mitad de 1 libra, tomo la mitad de 24 que son 12, y suponiendo ser libras, escribo 12 lib. que sumadas con las 96, es el valor que se busca 108 lib.

Demonstracion. Que las 24 varas multiplicadas por 4 lib. den 96 lib. consta de la regla general del multiplcar. Que por los 10 sueld. se hayan de tomar 12 lib. mitad de 24 es claro; porque como 10 sueld. sean la mitad de la libra, las 24 varas, por razon de los 10 sueld. valdrán 24 mitades de libra; esto es, 12 enteros ó libras.

MO-

MODO II.

Multiplíquense las 24 varas por 4 lib. y serán 96 lib. Multiplíquense las mismas 24 varas por los 10 sueld. y serán 240 sueld. que reducidos á libras, (3) son 12 lib. y todo 108 lib.

24 Varas.	
4 lib.	10 sueld.
96 lib.	240 sueld.
12 lib.	
108 lib.	

MODO III.

Redúzganse las 4 lib. y 10 sueld. á sueldos, y serán 90 sueld. Multiplíquense las 24 varas por 90 sueld. y será el valor 2160 sueld. que reducidos á libras, (3) son 108 lib. Todos los exemplos siguientes se pueden hacer por los modos sobredichos, que no repetiré por no ser molesto.

Exemplo 2. Pídese quánto valdrán 40 cahices de trigo á 6 lib. 15 sueld. el cahiz. Multiplico los 40 cahices por las 6 lib. y suben 240 lib. Y porque los 15 sueld. no son parte aliquota de la libra, sí partes, divido mentalmente el 15 en las porciones mayores que se pueda, que sean partes aliquotas de la libra, y sean 10 y 5. Pues porque 10 sueldos es mitad de libra, tomo la mitad de 40 cahices, que ahora supongo ser libras, y escribo 20 lib. Y porque 5 sueldos son mitad de la mitad de 1 libra, tomo la mitad de 20 libras, que son 10 lib. y escríbolas en su lugar; y la suma de todo es 270 lib. precio de los 40 cahices.

40 Cahices.	
6 lib.	15 sueld.
240 lib.	
20 lib.	
10 lib.	
270 lib.	

Exemplo 3. Multiplico las 36 varas por 3 lib. y es el producto 108 lib. Divido ahora los 16 sueldos en partes aliquotas de la libra, y sea en 10, 5, 1. Pues porque 10 es mitad de la libra, tomo la mitad de 36 que es 18 lib. Y porque 5 es mitad de la mitad de la libra, tomo 9 lib. mitad de 18 lib. Y porque 1 sueldo es la vigésima parte de la libra, tomo la vigésima parte de 36, que se hace partiéndolo por 20, y hallo 1 lib. y 16 sueld. Tambien por-

36 Varas.		
3 lib.	16 sueld.	9 din.
108 lib.		
18 lib.		
9 lib.		
1 lib.	16 sueld.	
	18 sueld.	
	9 sueld.	
138 lib.	3 sueld.	

porque 9 dineros no es parte, sí partes del sueldo, le divido en 6 y 3. Y porque 6 dineros son mitad del sueldo, tomo la mitad de las 36 varas, (que ahora suponen por sueldos) y son 18 sueldos: y porque 3 dineros son la mitad de la mitad del sueldo, tomo la mitad de 18 que son 9 sueldos; y la suma de todo 138 lib. 3 sueldos, es el valor que se pide.

DIFICULTAD II.

Multiplicar muchas especies por muchas especies.

MODO I.

Quando en la cantidad y multiplicador hay muchas especies, se multiplicará primero la mayor especie de la cantidad por todas las especies del multiplicador, como en los exemplos pasadôs. Hecho esto, se tomarán de todo el multiplicador aquella ó aquellas partes proporcionales, segun fueren las de las especies de la cantidad, respecto de su especie próxîme menor; y la suma de todo será el producto que se busca. Mejor se entenderá en los exemplos.

8 Varas,	2 palmos.	
4 lib.	10 sueld.	6 din.
32 lib.		
4 lib.		
	4 sueld.	
2 lib.	5 sueld.	3 din.
38 lib.	9 sueld.	3 din.

Exemplo. 1. Las 8 varas multiplicadas por 4 libras suben 32 lib. por razon de los 10 sueldos suben 4 lib. y por razon de los 6 dineros suben 4 sueldos: con esto se ha sacado el valor de las 8 varas. Solo falta sacar el valor de los 2 palmos; pues porque 2 palmos son la mitad de la vara, si 1 vara vale 4 lib. 10 sueld. 6 din. luego la mitad de la vara valdrá la mitad de 4 lib. que son 2 lib. la mitad de 10 sueldos, que son 5 sueld. y la mitad de 6 din. que son 3 dineros;

y

y la suma de todo 38 lib. 9 sueld. 3. din. es el producto.

MODO II.

Redúzgase toda la cantidad á la menor especie, que en nuestro exemplo son palmos: y como el palmo es el quarto de la vara, se habrá reducido la cantidad á quartos de vara: asimismo se reducirá el precio á la especie menor, que en el exemplo son dineros; y porque 240 dineros hacen 1 libra, quedará el precio reducido á 240 avos de libra: y se habrán formado dos quebrados, uno de la cantidad, y otro del precio; y multiplicando un quebrado por otro (17, 2 *Arith.*) el producto será lo que se desea. Explico esta práctica en el exemplo propuesto.

8 Varas, 2. palmos.
4 lib. 10 sueld. 6 din.

A	B	C
$\frac{34}{4}$ =	$\frac{1086}{240}$ |	$\frac{36924}{969}$

Las 8 varas son 32 palmos, y los 2 hacen 34 quartos de vara, que son el quebrado A. El precio reducido á dineros (3) son 1086 dineros ó 240 avos de libra, que son el quebrado B. Multiplíquese el quebrado A por el quebrado B, y el producto será el quebrado C. Redúzgase el quebrado C á enteros ó libras, y se hallarán 38 libras y sobran $\frac{444}{960}$ avos, que son partes de una libra; reducido este quebrado á vigésimas de libra ó sueldos (*por la* 11 *ú* 12 *del lib.* 2) multiplicando el numerador por 20, y partiendo el producto por el denominador 960, se hallarán 9 sueldos, y $\frac{240}{960}$ avos de sueldo; reducido este quebrado á dozavos de sueldo ó dineros, se hallará ser 3 dineros. Con que el producto es como ántes, 38 libras 9 sueldos 3 dineros.

Exemplo 2. Multiplico 24 varas por 3 libras, y salen 72 libras, que escribo en A: luego divido los 15 sueldos en 10 y 5; por los 10 tomo la mitad de 24 que es B, 12 libras, y por los 5 sueldos tomo la mitad de 12 libras que son 6 libras, y las escribo en C: y porque aun hay en el precio 8 dineros, que son dos tercios de 1 sueldo, tomo los dos tercios de 24 que son 16 sueldos, y los escribo en D en la serie de los sueldos. Y con esto queda acabada la multiplicacion de las

24 Varas, 3 palmos $\frac{3}{4}$
3 lib. 15 sueld. 8 din.

A	72 lib.			
B	12 lib.			
C	6 lib.			
D	lib.	16 sueld.		
E	1 lib.	17 sueld.	10 din.	
F	lib.	18 sueld.	11 din.	
G	lib.	9 sueld.	5 din.	$\frac{1}{2}$
H	lib.	4 sueld.	8 din.	$\frac{3}{4}$
L	94 lib.	6 sueld.	11 din.	$\frac{1}{4}$

24 varas por las 3 libras 15 sueldos 8 dineros.

Pero porque á mas de las 24 varas hay 3 palmos, prosigo así: Porque de los 3 palmos, los 2 son la mitad de la vara, tomo la mitad del precio; esto es, 1 libra 17 sueldos y 10 dineros, que escribo en E: y por consiguiente el otro palmo que queda hasta los 3 valdrá la mitad de 1 libra 17 sueldos 10 dineros, que es 18 sueldos y 11 dineros, que escribo en F: luego porque aun hay 3 quartos de palmo, y los 2 son la mitad de 1 palmo, tomo la mitad de F, y será 9 sueldos 5 dineros y $\frac{1}{2}$, y los escribo en G; y siendo este el valor de 2 quartos, será el valor del otro quarto que queda hasta los 3, la mitad de G; esto es, 4 sueldos 8 dineros y 3 quartos de dinero, escríboles en H. Y la suma L de todas las partidas es el producto que se desea.

De otro modo.

24 Varas, 3 palmos $\frac{3}{4}$
3 lib. 15 sueld. 8 din.

A $\frac{399}{16}$ B $\frac{908}{240}$ C $\frac{362292}{3840}$

Redúzganse las varas á palmos, é incorpórense los 2 palmos, y serán 99 palmos: redúzganse estos á quartos, multiplicándoles por 4, y serán 396 quartos, añadidos los 3 serán 399 quartos: y porque el quarto del palmo es la décimasexta de la vara, serán $\frac{399}{16}$ avos, y quedará la cantidad reducida al quebrado A. Redúzganse ahora las libras á sueldos, y serán 60 sueldos, é incorporando los 15, serán 75 sueldos. Reducidos estos á dineros, y añadidos los 8, serán 908 dineros: y porque el dinero es $\frac{1}{240}$ parte de la libra, serán $\frac{908}{240}$ avos de libra: con que el precio es el quebrado B. Hecho esto, mul-

multiplíquese el quebrado A por el quebrado B, y el producto será el quebrado C. Hágase la reduccion partiendo el numerador por el denominador, y será el quociente 94 libras y $\frac{1332}{3840}$ avos de libra: reducido este quebrado, es 6 sueldos y $\frac{3600}{3840}$ avos de sueldo: y reducido este último quebrado, es 11 dineros y 1 quarto.

PROP. V. Problema.

Partir números denominados.

Regla general. Redúzgase la cantidad á la última especie, y fórmese su quebrado, como en la proposicion pasada en el *modo* 2. Asimismo redúzgase el divisor á su última especie, formando su quebrado; pártase el quebrado de la cantidad por el quebrado del divisor, (18, 2) y el quociente que saliere, será el que se pretende.

Exemplo 1. 8 varas y 2 palmos de paño, costaron 38 lib. 9 suel. y 3 din. pídese quánto vale cada vara. Reducido el precio del modo sobredicho, forma el quebrado A, y la cantidad reducida forma el quebrado B; y partiendo el quebrado A por el B, es el quociente el quebrado C.

A $\frac{9231}{240}$ $\times$ B $\frac{34}{4}$ $\times$ C $\frac{36924}{8160}$ avos de libra.

Redúzgase el quebrado C á enteros ó libras, (14, 2) y será 4 lib. y $\frac{4284}{8160}$ avos de libra, que reducidos á sueldos ó 20 avos de libra, (11, 2) son 10 sueldos, y $\frac{4080}{8160}$ avos de sueldo, que reducidos á dineros, son 6 dineros: fué pues el valor de la vara 4 lib. 10 sueld. 6 din.

Exemplo 2. 38 lib. 9 sueld. y 3 din. se emplearon en ciertas varas de paño, por precio de 4 lib. 10 sueld. 6 din. la vara: pídese quántas varas de paño se compraron. El precio de todo el paño reducido á la última especie como ántes, forma el quebrado A: el precio de 1 vara asimismo reducido, forma el quebrado B: pártase A por B, y lo que saliere será el quociente que se busca.

Y

Y por tener entrambos un mismo denominador, basta partir el numerador de A por el numerador de B, y será el quociente 8 varas y $\frac{1}{2}$, ó 2 palmos.

A $\frac{9231}{240}$ B $\frac{1086}{240}$

PROP. VI. Problema.

Exámen de la logística de los números denominados.

Las pruebas de estas quatro operaciones son las mismas, que las de la lógística de los enteros y quebrados, porque el restar se prueba por el sumar, y el sumar por el restar. Tambien el multiplicar se exâmina por el partir, y el partir por el multiplicar.

LIBRO IV.

DE LA ANALOGÍA DE LOS NÚMEROS.

TRata este libro de los números proporcionales, y de sus propiedades. Divídese en quatro capítulos, en que se comprehenden las quatro Reglas que usan de las proporciones; es á saber: *Reglas de tres*, *de Compañías*, *de Aligaciones*, y *de Falsas posiciones*.

CA-

CAPITULO I.

DE LA REGLA DE TRES ú de proporcion.

TEngase en la memoria las Definiciones del *lib.* 5 de la *Geometría Element..r*; porque todo lo que allí se explicó de la quantidad en comun, se ha de aplicar aquí al número ó quantidad discreta en particular. Dexando pues de repetir aquí tanta multitud de Definiciones, solo pongo las siguientes para mayor claridad.

DEFINICIONES.

1 *Números proporcionales, se llaman los que son términos de dos razones semejantes*; como quando decimos: como 8 con 4, así 6 con 3. Los quatro números 8, 4, 6, 3 son proporcionales.

2 *Denominador de una razon, es el número que expresa quántas veces el antecedente incluye ó es incluido en el conseqüente de la razon*: y así, el denominador de la razon que hay de 20 á 5 es el 4; porque declara, que el 20 incluye quatro veces al 5. Por esto Euclídes en la *def.* 5 del *lib.* 6 llamó al denominador, *quantidad de la razon*; porque enseña quán grande ó pequeña sea la razon.

3 *Regla de tres ú de proporcion, es la que enseña el modo de hallar un quarto número proporcional*; esto es, dados tres números, enseña hallar el quarto, que tenga la misma razon con el tercero, que tiene el segundo con el primero.

4 *La proporcion se divide en directa y recíproca ó inversa. Directa*, es quando los términos se comparan directamente; esto es, como el primero al segundo, así el tercero al quarto. *Recíproca ó inversa*, se halla quando los términos se comparan indirectamente, como el segundo al tercero, así el quarto al primero: ó como el tercero al segundo, así el primero al quarto. Llámase *inversa*, por invertirse el órden de la comparacion; y *recíproca*, porque empezan-

zando la comparacion de la una parte de la proporcion, pasa á la segunda, y de esta vuelve á la primera, ó al contrario.

5 Qualquiera de las dichas proporciones puede ser simple ó compuesta. *Simple*, es la que solamente se compone de quatro términos principales, y por consiguiente de dos razones. *Compuesta*, es la que se compone de mas que quatro términos principales, y por consiguiente de mas que de dos razones, como se verá despues.

PROP. I. Teorema.

El producto que sale de la multiplicacion de un número por otro, es como un rectángulo, cuyos dos lados son los números que se multiplican.

Queda explicada esta proporcion en la *def.* 1 del *lib.* 2 de la *Geometria Elementar.* Multiplicando 6 por 3, sale el producto 18; y si hay un rectángulo, cuyos lados sean el uno 3 dedos, y el otro 6, constará de 18 dedos quadrados; y si se parte por 6, será el quociente 3. La razon se hallará en el lugar citado.

PROP. II. Teorema.

Si quatro números son proporcionales, el producto de la multiplicacion de los extremos es igual al producto de los medios; y si el producto de los extremos es igual al producto de los medios, serán los quatro números proporcionales.

Demuestra este Teorema Euclídes en la *prop.* 19 del *lib.* 7. Sean los quatro números proporcionales 3, 6, 2, 4: digo que el producto de 3 por 4 que son los extremos, es igual al producto de 6 por 2 que son los medios. Esto se vé claramente, porque entrambos productos son 12.

Demonstracion. De la multiplicacion de los extremos 3 y 4 resulta (1) un rectángulo, que se hace de dichos extremos, supuestos líneas; como tambien de la multiplicacion de los medios 6 y 2 resulta otro rectángulo hecho de dichos extremos: y siendo (16, 6) en quatro proporcionales el rectángulo de los extremos igual al de los medios, será el el produćto de los extremos 3 y 4 igual al de los medios 6 y 2. De lo dicho se colige la proposicion conversa.

PROP. III. Teorema.

Si tres números son proporcionales, el produćto de los extremos es igual al produćto que sale de la multiplicacion del medio por sí mismo; y al contrario.

Explicacion. Sean los tres proporcionales 2, 4, 8. Digo que el produćto de los extremos 2 y 8 que es 16, es igual al produćto de 4 por 4, que tambien es 16. Demuéstrase como la pasada; porque el produćto de los extremos es un rećtángulo, y el del medio por sí mismo es un quadrado; y como (17, 6) el rećtángulo de los extremos sea igual al quadrado del medio proporcional, se sigue ser dichos produćtos iguales; y al contrario.

PROP. IV. Problema.

Regla de proporcion simple y direćta.

1 Dados tres números, se busca el quarto proporcional; esto es, que la misma razon que hay del primero al segundo, haya del tercero al quarto.

Operacion. Multiplíquese el segundo por el tercero, y el produćto pártase por el primero; y el quociente será el quarto proporcional que se busca.

Exemplo. Si 100 reales ganan 8, 200 ¿quánto ganarán? Multiplíquese 200 por 8, y el produćto 1600 pártase por 100, y será el quociente 16, y tantos ganarán los 200.

Demonstracion. (2) El produćto de 200 por 8 que son los medios, es igual al produćto de los extremos 100 y 16: luego si el produćto de 200 por 8 se parte por 100, que es el un lado ó número producente, se tendrá el otro lado ó número 16 que se ignoraba.

2 Dados dos números, se busca un tercero proporcional; de suerte, que la misma razon haya del primero al segundo, que de este al tercero. Multiplíquese el segundo por sí mismo, y el produćto pártase por el primero; y el quociente será el tercer número que se busca. Como si 4 ganan 8, 8 ¿qué ganarán? Multiplíquese 8 por 8, y el produc-

ducto 64 pártase por 4, y el quociente 16 es lo que ganan respectivamente los 8. Consta por la misma demonstracion.

PROP. V. Problema.

Disponer los términos de la regla de tres simple, y conocer si es directa ó inversa.

Si al Aritmético se le proponen los términos desordenados, les debe ordenar y disponer ántes de la operacion. Para esto sirven las reglas siguientes.

1 Siempre que el primer término es de la misma especie del que falta, siendo los demas de otra especie, está alterado el órden. Como si 8 varas valen 32 reales, por 20 reales ¿qué varas darán? Donde por ser el primero y último varas, y los demas de otra especie, está alterado el órden. El modo de disponerles es, poner en primer lugar el segundo, y el primero en el segundo lugar, y así dirémos: si por 32 reales dan 8 varas, por 20 reales ¿quántas varas darán? Y obrando segun la regla, saldrán 5.

2 A veces se propone la qüestion de tal suerte, que necesita de reduccion: como si en 8 meses gano 60 reales, en 3 años ¿quántos reales ganaré? Aquí es menester, que los tres años se reduzgan á meses, para que el tercer término sea de la misma especie del primero, y se propondrá así: si en 8 meses gano 60 reales, en 36 meses ¿quánto ganaré? Y siguiendo la regla, se hallarán 270 reales.

3 Algunas veces se dan en la qüestion dos términos simples y uno compuesto, y entónces es menester hacer composicion de los otros dos sumándoles, y disponer la pregunta como en el exemplo siguiente: Por 1 libra se paga 1 sueldo de interes, he pagado con principal é interes 1050 sueldos: pregúntase, ¿quánto he pagado de interes? Pues porque los 1050 sueldos se componen tanto del principal, como de su interes, tambien he de componer la libra con su interes, que es 1 sueldo. Junto pues 20 sueldos, que es 1 libra, con 1 sueldo que es su interes, y serán 21 sueldo, y digo: si en 21 sueldo hay uno de interes, en 1050 ¿quántos habrá de interes? Y hecha la reso-
lu-

lucion por la regla de tres, hallaré ser 50 sueldos: y así en otros casos semejantes.

4 Para conocer si la qüestion propuesta es de proporcion directa ó inversa, se observará esta regla. Ordenados los términos, véase si por crecer el tercer número respecto del primero, se sigue por consequencia, que el quarto tambien ha de crecer respecto del segundo; ó si menguando el tercero, se sigue, que el quarto tambien ha de menguar; porque en este caso la regla de tres es de proporcion directa. Pero si creciendo el tercero, se sigue, que el quarto ha de menguar; ó menguando el tercero, se sigue, que el quarto ha de crecer, la regla de tres será de proporcion inversa.

Exemplo. Si 100 ganan 10, 200 ¿qué ganarán? Ya se vé, que por ser 200 mas que 100, la ganancia tambien ha de ser mas que 10; con que esta proporcion es directa. Si 3 Oficiales acaban cierta obra en 12 dias, 6 Oficiales ¿en quántos dias la acabarán? Claro está, que creciendo el número de los Oficiales, ha de menguar el número de los dias; porque acabarán la obra mas presto: esta pues y sus semejantes, es inversa.

PROP. VI. Problema.

Regla de proporcion simple inversa.

Dados tres números A, B, C, se busca D que tenga la misma razon con el primero A, que el segundo B tiene con el tercero C.

A	B	C	D
4	6	3	8

Operacion. Multiplíquese el primero por el segundo, y el producto pártase por el tercero, y el quociente será el quarto que se busca. Como multiplicando A por B, será el producto 24, este partido por C, da el quociente 8, que tiene la misma razon con el 4, que 6 con 3. O póngase el tercer número en primer lugar, y guárdese el mismo modo de obrar, que en la regla de tres directa.

Demonstracion. Por ser la proporcion recíproca, son proporcionales B á C, como D á A: luego el producto de los extremos B, A es igual al producto de los medios C,

D:

D: (2) luego si el producto de los extremos B, A se parte por C, se tendrá el quarto proporcional D.

Exemplo. Si 3 Oficiales acaban una obra en 18 dias, 9 Oficiales ¿en quántos dias la acabarán? Es cierto, que en ménos dias: luego es (5) proporcion inversa. Multiplico pues el primer término 3 por el segundo 18, y el producto 54 partido por 9, da el quociente 6, y digo, que los 9 Oficiales harán la obra en 6 dias.

PROP. VII. Problema.

Exámen de las reglas de tres sencillas.

1 Si la regla de tres es directa, multiplíquese el primer término por el quarto; y asimismo el segundo por el tercero: y si se hubiere obrado bien, serán los productos iguales. (2)

2 Si la regla de tres fuere inversa ó recíproca, multiplíquese el primer término por el segundo; y asimismo el tercero por el quarto: y si se hubiere obrado bien, serán los productos iguales. (2)

PROP. VIII. Problema.

Reglas de proporcion compuesta directa.

Supongo lo primero, que en qualquiera qüestion de proporcion se hallan dos partes, y en cada una de estas partes hay diferentes términos: los términos que están en la primera parte son todos conocidos; pero en la segunda parte hay alguno que se ignora.

Supongo lo segundo, que de tantas proporciones se compone la qüestion, como hay términos conocidos en la segunda parte: como si 6 ganan 3, 8 ¿qué ganarán? Solo hay un término conocido en la segunda parte, y así solo hay una proporcion; pero en esta: si 6 en 10 dias ganan 2, 8 en 20 dias ¿qué ganarán? hay dos proporciones, porque hay dos términos conocidos en la segunda parte.

Supongo lo tercero, que para que salga la operacion acertada, se han de disponer los términos de ella de suerte, que el primero de la primera parte sea de la misma especie, que el primero de la segunda, y asimismo sean de una mis-

misma especie el segundo de la primera, y segundo de la segunda, &c. Esto supuesto, explicaré dos reglas que hay para resolver las qüestiones de proporcion compuesta.

REGLA I.

Esta regla consiste en formar y resolver de por sí tantas reglas de tres sencillas, quantas son las proporciones de que se compone la qüestion: su execucion se vé en el exemplo siguiente; porque muchas veces usar de términos abstractos en la explicacion de las reglas, mas confunde, que declara los preceptos. Sea pues la qüestion que se sigue:

25 Oficiales en 6 dias ganan 100, ·30 Oficiales en 8 dias ¿qué ganarán?

Porque en la segunda parte hay dos términos conocidos, se forman dos reglas de tres. La primera: Si 25 Oficiales ganan 100, ·30 Oficiales ¿qué ganarán? Resuélvase por la *propos.* 4, y se hallará ganan 120, la qual se ha de entender, trabajando 6 dias como los primeros. Búscase ahora quánto ganarán esos mismos 30 Oficiales trabajando 8 dias; y para esto se forma la segunda regla de tres: Si en 6 dias ganan 120, ¿qué ganarán en 8 dias? Y resolviéndola como la pasada, se hallará ganan 160. La razon es clara; porque por la primera regla de tres, se saca lo que ganan 30 Oficiales en 6 dias; y sabido esto, se saca por la segunda lo que ganarán los mismos en 8 dias.

REGLA II.

1 Se ordenarán los términos de la qüestion, como se vé en la siguiente.

25 hombres 6 dias 100, ·30 hombres 8 dias .

Quiere decir: Si 25 hombres en 6 dias ganan 100 libras, ·30 hombres en 8 dias ¿qué ganarán? Donde se vé, hay en la qüestion seis términos, tres en cada parte; y el que se ignora tiene en su lugar por señal un punto.

2 Escríbanse los mismos términos, como en AB, en una línea, siempre con este órden: el último en primer lugar, que en este exemplo es cero, por ser el último el que se ignora; despues siguen el primero 25,

A				B		
0	25	6	]	100	30	8

 el

el segundo 6, &c. como se vé: pártanse con una raya ó distincion en dos partes, de suerte, que tantos haya en la una parte como en la otra.

3 Escríbanse en forma de quebrado: los de la parte A sobre una raya; y los de B debaxo de ella, como en C, ó al reves, como en D: de qualquiera de estos dos modos estarán bien colocados.

$$C \; \frac{0 \quad 25 \quad 6}{100 \quad 30 \quad 8}$$

$$D \; \frac{100 \quad 30 \quad 8}{0 \quad 25 \quad 6}$$

4 Váyanse multiplicando continuamente los números que están sobre la raya, y guárdese el producto. Multiplíquense asimismo continuamente los que están debaxo de la raya, y guárdese tambien su producto.

5 De estos productos, el que salió de aquella serie en que se halla el cero ó señal del número que se busca, será partidor, por quien se partirá el otro producto; y el quociente será el número que se busca.

Multiplico pues en C 25 por 6, y es el producto 150, al qual guardo aparte, porque ha de ser el partidor, por haber salido de la serie en quien está el cero. Multiplico ahora 100 por 30, y es el producto 3000. Multiplico 3000 por 8, y es el producto 24000. Parto este producto por 150, y el quociente 160 es el número que se busca. De suerte, que si 25 hombres en 6 dias ganan 100, 30 hombres en 8 dias ganarán 160.

Demonstracion. Esta regla no se distingue substancialmente de la primera; porque si dixésemos: si 25 hombres ganan 100, ¿qué ganarán 30 hombres? Multiplicando 100 por 30, sale el producto 3000, que partido por 25, es el quociente en forma de quebrado $\frac{3000}{25}$, que es lo que ganan los 30 hombres en 6 dias. Pasando ahora, segun la Regla I, á hacer la otra regla de tres, dirémos: si en 6 dias ganan $\frac{3000}{25}$, ¿quánto ganarán en 8 dias? Multiplicando este quebrado por 8, es el producto $\frac{24000}{25}$ avos, y este partido por 6, es $\frac{24000}{150}$ avos, (18, 2) que es lo que ganan los 30 hombres en 8 dias, que si se reduce á enteros, partiendo 24000 por 150, salen 160 como arriba: luego es evidente dicha regla.

De

De la misma suerte se obrará, faltando qualquiera de los otros números de la segunda parte de la qüestion, como se vé en este exemplo, suponiendo que se ignoran los dias: Si 25 hombres en 6 dias ganan 100, ¿30 hombres en quántos dias ganarán 160?

25 hombres 6 dias 100, 30 hombres dias 160,

Dispuestos los términos en forma de quebrado, están como en A. Multiplico 160 por 25; y el producto 4000 por 6 es el producto 24000, que guardo. Multiplico 100 por 30, y sale el producto 3000, que servirá de partidor, por salir de la serie en que está el cero; y hecha la particion de 24000 por 3000, es el quociente 8, que es el número de los dias que se piden.

$$A\ \frac{160 \quad 25 \quad 6}{100 \quad 30 \quad 0}$$

Si ácaso en la qüestion se ignorasen dos términos, habrá muchas respuestas, y así se supondrá conocido qualquiera de los términos que faltan, poniendo en su lugar qualquiera número, y se obrará como ántes. *Exemplo.* Si 25 hombres en 6 dias ganan 100, ¿quántos hombres y en quántos dias ganarán 160? Supongo, que los hombres sean 40, y hecha la operacion como ántes, se hallarán 6 dias, en que ganarán los 160. Tambien se puede suponer qualquiera número de dias, y se hallará el número de los hombres.

PROP. IX. Problema.

Conocer si hay indireccion en las qüestiones de proporcion compuesta.

En estas qüestiones puede suceder, que alguna ó algunas de las proporciones de que se componen, sean inversas, lo qual se conocerá exâminando por la regla dada en la *prop.* 5 todas las proporciones, cada una de por sí, sin variar el órden de la propuesta, como en el exemplo sobredicho.

Si 25 hombres en 6 dias ganan 100, 30 hombres en 8 dias ¿qué ganarán? Considero la primera proporcion, que es: Si 25 hombres ganan 100, 8 hombres ¿qué ganarán? Y veo ser proporcion directa, porque siendo ménos los hombres, ganarán ménos. Exâmino despues la segunda, que es: Si 6 dias ganan 100, ¿qué ganarán 8 dias? Y hallo ser tambien directa, porque creciendo los dias, ha de crecer la ganancia. Concluyo pues, que en dicha qüestion no hay inversion alguna.

Dixe: *Sin variar el órden de la propuesta*; porque una misma proporcion compuesta, solo con mudar de término incógnito, puede pasar de directa á inversa, ó al contrario, como en el exemplo dicho, si se buscasen los dias en esta forma: 25 hombres para ganar 100 libras, han menester 6 dias: 30 hombres para ganar 160 libras, ¿quántos dias habrán menester? Donde se vé, que si 25 hombres para ganar 100 libras han menester 6 dias, 30 hombres ganarán 100 libras en ménos dias, por ser mas en número; y por consiguiente, en ménos dias respectivamente ganarán las 160 libras: luego esta proporcion es inversa; y seria menester para su resolucion aplicar las cautelas que se dirán en la proposicion siguiente, teniendo los términos la disposicion sobredicha; pero en la que tienen en la propuesta antecedente, no es menester inmutar cosa alguna para buscar el número de los dias, como se vió en la proposicion pasada; porque guardando aquel órden, llevan ya consigo todo lo que las cautelas que dirémos podian prevenir.

PROP. X. Problema.

Regla de proporcion compuesta inversa.

Quando en la qüestion propuesta se encuentra alguna proporcion inversa, se guardarán las cautelas siguientes.

1 Nótese con diligencia, qué términos son la causa de la inversion; esto es, qué términos son causa de que el que se busca haya de ser menor ó mayor de lo que seria si la proporcion no fuere inversa. 2 Fórmese el quebrado de los términos, como en la directa. 3 Los términos que fueren causa de la inversion, permuten sus lugares mutuamente, baxando el que está sobre la raya, y subiendo el que está

tá debaxo de ella. 4 Hecho esto, se guardarán los preceptos mismos, que se dieron en la *prop.* 8, *regla* 2, para las composiciones directas, y se hallará el número que se busca.

Exemplo. Si 100 Soldados abren 80 varas de foso en 6 dias, 75 Soldados 120 varas de foso, ¿en quántos dias las abrirán?

100 Soldados 80 var. 6 dias, 75 Sold. 120 var. dias.
Primeramente averiguo si hay inversion, de esta manera: La primera proporcion es: Si 100 Soldados abren un foso en 6 dias, 75 Soldados ¿en qué dias abrirán el mismo foso? Donde veo claramente, que por ser ménos los trabajadores, han de gastar mas dias. Concluyo pues, que esta proporcion es inversa, y que la causa de la inversion son los trabajadores. Exâmino despues la otra proporcion, que es: Si 80 varas han menester 6 dias de trabajo, 120 varas han menester mas dias, siendo lo demas igual: luego aquí no hay inversion. Consiste pues la única inversion en los números de los trabajadores, que son 100 y 75.

$$A\ \frac{0 \qquad 100 \qquad 80}{6 \qquad 75 \qquad 120}$$

$$B\ \frac{0 \qquad 75 \qquad 80}{6 \qquad 100 \qquad 120}$$

2 Escribo el quebrado directo A; esto es, con la misma disposicion, que en las qüestiones de proporciones directas. Y porque la causa de la inversion son 100 y 75, hago que permuten sus lugares, escribiendo el quebrado B inverso, y de este usaré para resolver la qüestion.

Multiplico pues 75 por 80, y el producto 6000 guardo para partidor. Multiplico 6 por 100, y el producto 600 por 120, y es el producto 72000, á quien parto por 6000, y el quociente 12 es el número de dias que se busca.

De otro modo.

Formo primero esta regla de tres: Si 100 Soldados abren un foso en 6 dias, 75 Soldados ¿en qué dias le abrirán? Y porque es proporcion inversa, usaré de la regla de la *prop.* 6. Multiplico pues 100 por 6, y al producto 600 parto por 75, y es el quociente 8, y estos son los dias

que

que gastarian 75 Soldados en hacer el foso de 80 varas. Hago pues ahora otra regla de tres, diciendo: Si 80 varas han menester 8 dias de trabajo, (se entiende trabajando 75 Soldados) 120 varas ¿qué dias habrán menester? Y porque es proporcion directa, multiplico 120 por 8, y el producto 960 partido por 80, da el quociente 12 dias, como se halló por el modo antecedente.

PROP. XI. Problema.

Resuélvense algunas qüestiones por las reglas de tres.

Aunque de lo dicho se colige el modo de resolver todas las qüestiones de reglas de tres ó de proporcion; pero porque en la preparacion de los términos pueden ocurrir varias dificultades, resolveré aquí algunas qüestiones, que aunque pocas por la brevedad de este compendio, pero bastantes, para que á imitacion suya pueda resolver el Aritmético qualesquiera otras.

Qüestion 1. Pídese 240 lib. de Castilla, ¿quántas libras son de Valencia? Porque la libra en Castilla consta de 16 onzas, multiplico las 240 lib. por 16, y serán 3840 onzas. Voy ahora á la Tabla del *cap.* 3 *lib.* 1, y hallo, que 32 onzas de Castilla hacen 31 de Valencia, y formo la siguiente regla de tres: Si 32 dan 31, luego 3840 onzas de Castilla, son 3720 onzas de Valencia. Reduzgo estas á libras, partiéndolas por 12, que son las onzas de una libra en Valencia, y el quociente es 310. Digo pues que son 310 libras de Valencia. Y así se harán las demas reducciones.

Qüestion 2. Un Mercader compró cierta mercadería por 300 reales: pídese ¿por quánto la habrá de vender para ganar á 8 por 100? Súmense los 8 con los 100, y fórmese esta regla de tres: Si 100 suben á 108, luego 300 subirán á 324, y por tanto precio la ha de vender.

Qüestion 3. Un Mercader vendió cierta mercadería por 324 reales, y halló que ganaba á 8 por 100: pídese ¿quánto le costó la dicha mercadería? Súmense 8 y 100, y serán 108, y hágase la regla de tres: Si 108 vienen

de

de 100, ¿de quántos vendrán 324? y se hallarán vienen de 300 reales; y tanto le costó dicha mercadería.

Qüestion 4. Vendiendo 4 varas de paño por 8 ducados, se pierde á razon de 10 por 100. Si se vendiesen 6 varas por 16 ducados, ¿quánto se ganará ó perderá por 100? Réstense los 10 que se pierden por 100 del mismo 100, y quedarán 90, y este 90 será el término tercero en la proporcion, dexando los 100 como si no estuvieran, y será la disposicion siguiente:

4 var. 8 ducad. 90 · 6 var. 16 ducad. ...

El quebrado directo es A; pero como por ser mas las varas que se dan por el mismo precio, la ganancia ha de ser ménos, hay inversion, cuya causa es el número de las varas, y se formará el quebrado inverso B; y siguiendo la regla, será el producto de los denominadores 5760, y el de los numeradores 48. Parto aquel número por este, y es el quociente 120; y porque es mas que 100, resto 100 de 120, y quedarán 20 de ganancia por 100; y si este quociente hallado fuere menor que 100, le restaria de 100, y el residuo seria la pérdida por 100.

$$A\ \begin{array}{ccc} 0 & 4 & 8 \\ \hline 90 & 6 & 16 \end{array}$$

$$B\ \begin{array}{ccc} 0 & 6 & 8 \\ \hline 90 & 4 & 16 \end{array}$$

Qüestion 5. Vendiendo 4 varas de paño por 8 ducados, se pierde á razon de 10 por 100, ·6 varas ¿por quántos ducados se habrán de vender para ganar á 20 por 100? Resto como ántes los 10 de pérdida del caudal 100, y quedan 90: sumo la ganancia 20 con el caudal, y será 120, y dispongo los términos, como se sigue:

4 var. 8 duc. 90, ·6 var. ...duc. 120.

El quebrado es B, por la misma razon de la qüestion pasada; el B producto de los numeradores es 5760; el de los denominadores es 360; partido aquel por este, es el quociente 16, y este es el número que se desea.

$$B\ \begin{array}{ccc} 120 & 6 & 8 \\ \hline 90 & 4 & 0 \end{array}$$

Qüestion 6. Debe uno 100 libras, que ha de pagar al fin de un año; pero si las paga de contado, se le ofrece por

por parte de su acreedor, le remitirá á razon de 10 por 100. Pídese, ¿quánto dará de contado? Añádanse los 10 á los 100, y serán 110. Digase ahora: Si 110 baxan á 100, ¿á quántos baxarán 100 libras? Siguiendo la regla se hallarán 90 lib. 18 sueld. y 2 din. y tanto ha de pagar de contado.

Qüestion 7. Pedro prestó á Juan 2400 reales por 8 meses á razon de 5 por 100. Pregúntase, ¿quánto sube el interés? Dígase: si 100 en 12 meses, que es un año, ganan 5, los 2400 en 8 meses ¿qué ganarán? Sígase la regla, y se hallarán 80 reales.

Qüestion 8. Pedro prestó á Juan 20 lib. con tal, que al cabo de 2 meses le ha de volver 22. Pregúntase, ¿á quánto gana por 100? Hágase esta regla de tres: Si 20 lib. en 2 meses ganan 2, las 100 lib. en 12 meses ¿quánto ganarán? y se hallará ganan 60 lib. luego gana á 60 por 100, ganancia exôrbitante y contra conciencia.

Qüestion 9. Pedro prestó á Juan 450 reales por 12 años, á razon de 5 por 100. Pídese, ¿quánto le ha de volver pasados los 12 años? Hágase primeramente esta regla de tres: Si 100 en 1 año ganan 5, los mismos 100 en 12 años ¿qué ganarán? y se hallará ganan 60. Dígase ahora segunda vez, sumando los 60 con el caudal: Si 100 suben á 160, 450 ¿á quántos subirán? y resuelta esta última qüestion, se hallará salen 720, y tantos reales le ha de volver.

Qüestion 10. Pedro prestó á Juan 1000 lib. por 3 años, á razon de 10 por 100, con pauto, que el interes gane al respecto del principal. Pídese, ¿quánto ha de volver Juan pasados los 3 años? Dispónganse las reglas de tres con el órden siguiente: *Año primero.* Si 100 ganan 10, luego 1000 ganarán 100: súmense estos 100 con el caudal, y será 1100. *Año segundo.* Si 100 ganan 10, luego 1100 ganarán 110: suménse 110 con 1100, y serán 1210. *Año tercero.* Si 100 ganan 10, luego 1210 ganarán 121, que sumados con los 1210, son 1331, y este es todo el crédito al cabo de los 3 años; y la ganancia son 331.

CA-

CAPITULO II.

DE LA REGLA DE COMPAÑIAS.

LA regla de compañías consiste en dividir un número en partes proporcionales á otros números dados: con que resuelto y demonstrado este Problema, quedará demonstrada la regla de compañías. Es de dos maneras, *simple* y *compuesta*: en aquella se reparte una cantidad en partes proporcionales á otras dadas, sin atender á tiempo ni otras circunstancias; en la compuesta se atiende al tiempo ú otras condiciones.

PROP. XII. Problema.

Dividir un número en qualesquiera partes proporcionales á otros números dados.

Pídese, que el número 100 se divida en tres partes, que guarden entre si la razon de 10, 9, 6.

Operacion. Súmense los números dados 10, 9, 6, y la suma será 25. Dispónganse ahora tantas reglas de tres, quantos son los números dados; y en todas será el primer término la suma 25: el segundo, el número 100, que se ha de dividir; y en tercero lugar se pondrán los tres números dados, en la forma siguiente.

Despues se dirá: Si 25 dan 100, luego 10 dan 40. Otra vez: Si 25 dan 100, luego 9 dan 36. Otra vez: Si 25 dan 100, luego 6 dan 24, y son los números 40, 36, 24 los que se piden.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & A & B \\
 & & \multirow{3}{*}{$\left\{\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right.$} & 10 & 40 \\
25 & 100 & & 9 & 36 \\
 & & & 6 & 24 \\
\hline
 & & & 25 & 100
\end{array}
$$

Demonstracion. Consta de la operacion, que 25 á 100, es como 10 á 40, y alternando 25 á 10, es como 100 á 40, é invertiendo, es 10 á 25 como 40 á 100. Tambien es 25 á 9, como 100 á 36: luego (*por igualdad ordenada*) será 10 á 9, como 40 á 36, segun aquí se vé:

10 25 9 40 100 36

De

De la misma suerte demonstraré, que 9 á 6 es como 36 á 24: luego los tres números 40, 36, 24, tienen entre sí la misma razon que 10, 25, 9.

Solo falta demonstrar, que los números de la serie B juntos hacen 100. Demuéstrase así: Por ser proporcionales los números A con los números B, será (12, 5) la suma de A á la suma de B, como qualquiera antecedente 10 á su conseqüente 40; 10 á 40 es (*por construc.*) como 25 á 100: luego la suma de A á la suma de B, es como 25 á 100; y alternando, la suma de A es á 25 como la suma de B á 100; aquella, por suposicion, es igual á 25: luego esta es igual á 100.

PROP. XIII. Problema.

Regla de compañías simples.

La regla de compañías, no es mas, que una práctica del Problema antecedente, como se verá en sus qüestiones.

Qüestion 1. Tres Mercaderes pusieron á ganancia, el primero 20 doblones, el segundo 18, y el tercero 12, y ganaron entre todos 100 doblones. Pregúntase, ¿quánto ganó cada uno? que es lo mismo que pedir, que el número 100 se divida en tres partes, que tengan entre sí la misma operacion, que 20, 18, 12.

Operacion. Súmense estos tres números, y la suma 50 será el primer término para tres reglas de proporcion; y el segundo será 100; y el tercero será cada caudal en particular, como aquí se vé.

		20	40
50	100	18	36
		12	24

Dígase pues; si 50 dán 100, ¿qué darán 20? y salen 40, ganancia del primero. Asimismo si 50 ganan 100, luego 18 ganan 36, ganancia del segundo. Tambien si 50 ganan 100, luego 12 ganan 24, ganancia del tercero. Estas ganancias parciales han de sumar 100, ganancia comun; así como los caudales parciales sumados hacen 50, caudal comun.

Qües-

Qüestion 2. Tres emplearon 100 doblones, y el primero ganó 20; el segundo 18; y el tercero 12. Pídese, ¿qué caudal puso cada uno? Obrese como ántes, y se hallará ser el caudal del primero 40, del segundo 36, y del tercero 24.

Qüestion 3. Es menester enviar socorro de harina á una Plaza: hay 720 cahices de trigo, que se han de repartir entre quatro Molinos, el primero en un dia muele 2 cahices, el segundo 4, el tercero 5, y el quarto muele 7. Pídese, ¿quántos se han de dar á cada Molino, para que se acaben de moler todos á un mismo tiempo? Súmense los números 2, 4, 5, 7, y la suma 18 será el primer término para las reglas de tres, el segundo será 720, y el tercero serán los números 2, 4, &c. de por sí. Resuélvanse como ántes, y se hallarán los cahices que se han de dar á cada Molino, como se vé en el exemplo.

		2	80
18	720	4	160
		5	200
		7	280

Qüestion 4. Tengo tres acreedores, al primero debo 40, al segundo 36, al tercero 24; tengo solos 50 reales. Pídese, ¿quánto he de dar á cada uno, guardando la proporcion de las deudas? Sumo 40, 36, 24, y serán 100, término primero, el segundo serán los 50 reales, y el tercero los números 40, 36 y 24. Y resolviendo las reglas de tres, hallo lo que he de dar á cada acreedor.

		40	20
100	50	36	18
		24	12

PROP. XIV. Problema.

Regla de compañías compuestas.

Si en las compañías hay tiempo, se multiplicará por los caudales de cada uno, y en los productos se formará la misma regla de la proposicion antecedente. Advirtiendo, que en todos los caudales ha de ser el tiempo de una misma especie, como años ó meses, &c. porque si en un caudal fuere meses y en otro años, se habrá de reducir á una misma especie.

Qües-

Qüestion 1. Dos Mercaderes emplearon, el primero 320 lib. por 5 meses, el segundo 300 lib. por 6 meses, y ganaron 340 lib. Pídese la ganancia de cada uno. Multiplíquese el caudal de cada uno por su propio tiempo; esto es, 320 por 5, y será el producto 1600. Multiplico asimismo 300 por 6, y será el producto 1800. Súmense los productos, y la suma será 3400, y este es término primero, y 340 el segundo para las dos reglas de tres. Si 3400 ganan 340, luego 1600 ganan 160. Si 3400 ganan 340, luego 1800 ganan 180.

$$3400 \quad 340\begin{cases} 1600 & 160 \\ 1800 & 180 \end{cases}$$

Demonstr. Solo es menester demonstrar, que cada caudal se ha de multiplicar por su tiempo, que lo demas está demonstrado en la *propos.* 12. La razon pues por qué se hace dicha multiplicacion es, porque exponer 320 por cinco meses, es lo mismo que exponer cinco veces por un mes los 320; esto es, exponer por un mes los 320 tomados cinco veces, que es 1600. Asimismo diré, que el que expone 300 por seis meses, hace lo mismo que si se expusiera seis veces 300; esto es, 1800 por un mes: luego por medio de esta multiplicacion, se reduce á compañía simple; y por consiguiente se resuelve de la misma forma. De esta manera se resolverán otras qüestiones semejantes de compañías, que omito por brevedad; pero añado las siguientes, por necesitar de especiales prevenciones su resolucion.

Qüestion 2. Supónese un Leon de mármol, que despide agua por ojos, pies y boca; y se busca lo que el Obispo Caramuel propone en la forma siguiente:

El que fulminó incendios en el Cielo,
y si me abrasa el Sol, abraso el mundo,
hoy en la tierra convertido en yelo,
por ojos, pies y boca me difundo,
y con nectar divino
refresco al fatigado peregrino.
Este pilon de mármol esculpido,

que

que en pocos dias ha sido fabricado,
en dos el primer ojo le ha llovido;
pero en tres el segundo le ha llorado:
en quatro el pie le toca,
y se escupe en seis horas por la boca.
Esto hace un caño solo:
¿y todos juntos? Lo difina Apolo.

Redúzganse primero los dias á horas, y se sabrá, que el ojo derecho llena la pila en 48 horas, el siniestro en 72, el pie en 96, y la boca en 6: luego el ojo derecho en 1 hora llenará $\frac{1}{48}$ avo de la pila, el siniestro tambien en 1 hora llenará $\frac{1}{72}$ avo, el pie $\frac{1}{96}$ avo, y la boca $\frac{1}{6}$. Redúzganse los quebrados á un comun denominador, que será 1.990656, y los numeradores (10, 2) serán 331776, 20736, 27648, 41472. Súmense estos quebrados, y será la suma de los numeradores 421632. Hecho esto, para saber en qué tiempo llenarán la pila todos juntos, se hará esta regla de tres: Si 421632, suma de los numeradores, dan 1 hora; ¿qué dará el denominador 1.990656? y se hallarán 4 horas, 43 minutos, y algunos segundos.

Qüestion 3. Pagaron entre quatro el precio de una lámpara: el primero dió $\frac{1}{5}$ del precio, el segundo $\frac{2}{7}$, el tercero $\frac{3}{10}$, y el quarto dió 15 libras. Pídese, ¿quánto fué todo el precio? Redúzganse todos los quebrados á un comun denominador, (10, 2) y serán $\frac{70}{350}$, $\frac{100}{350}$ y $\frac{105}{350}$ avos. Súmense los tres, y será la suma $\frac{275}{350}$ avos; y esto es lo que dieron los tres primeros: luego el quarto dió lo restante hasta $\frac{350}{350}$ avos, que es el precio entero: luego dió $\frac{75}{350}$ avos: luego las 15 libras que dió, son $\frac{75}{350}$ avos del precio.

Con esto se sabrá todo el precio por esta regla de tres: Si $\frac{75}{350}$ avos son 15 libras, 350 ¿quánto serán? Y no haciendo caso de los denominadores, por ser una misma cosa, multiplico 350 por 15, y el producto partido por 75 da 70 libras, y esto es todo el precio. La prueba de esto es, que $\frac{1}{5}$ de 70 son 14 libras, los $\frac{2}{7}$ son 20 libras, y los $\frac{3}{10}$ son

21 libra, que sumadas, son 55, que es lo que dieron los tres primeros: y restadas 55 libras de 70, quedan 15 que dió el quarto.

Qüestion 4. Cierta hacienda se repartió entre tres á razon de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{6}$. El primero tuvo 900 libras: pídese ¿quánto era toda la hacienda, y lo que les tocó á los otros? Redúzganse los quebrados, y serán $\frac{30}{24}$ y $\frac{20}{120}$ avos. Súmense, y será la suma $\frac{74}{120}$ avos. Hágase ahora esta regla de tres: Si $\frac{30}{120}$ avos dan $\frac{74}{120}$ avos, que es toda la hacienda, ¿qué darán 900? Y salen 2220, cantidad de toda la hacienda. Para hallar lo que les toca á los otros, se harán estas reglas de tres: Si $\frac{30}{120}$ avos son 900, ¿qué serán $\frac{24}{120}$ avos? Y se hallarán 720 para el segundo. Otra vez: Si $\frac{30}{120}$ avos son 900, ¿qué serán $\frac{20}{120}$ avos? Y se hallarán 600 para el tercero.

Qüestion 5. Madrid y Barcelona distan 100 leguas, y salen á un mismo tiempo dos correos, uno de Madrid para Barcelona, y este camina 10 leguas cada dia: el otro de Barcelona para Madrid, y camina 15 leguas cada dia. Pregúntase, ¿quándo se juntarán? Súmense las leguas que camina cada uno al dia, y será la suma 25, y esto es lo que caminan los dos en un dia: luego si 25 leguas las caminan en un dia, 100 leguas las caminarán entre los dos, cada uno por su parte, en quatro dias: luego al cabo de quatro dias concurrirán los correos.

Si se pidiere quánto habrá caminado cada correo quando concurren, se multiplicará lo que cada uno camina al dia por los quatro dias sobredichos que tardan en concurrir, y se sabrá lo que se desea: multiplico pues 10 por 4, y 15 por 4, y los productos 40 y 60 manifiestan, que el uno caminó 40 leguas, y el otro 60.

Qüestion 6. Un correo que camina 15 leguas cada dia, sale de un lugar seis dias despues de otro que camina 10 leguas al dia. Pregúntase, ¿quándo le alcanzará? Réstese 10 de 15, y la diferencia 5 es lo que camina mas el uno que el otro al dia; y porque el mas tardo, que camina 10 leguas al dia, salió ántes 6 dias, es claro, que habrá caminado 60 leguas, al tiempo que el mas veloz empieza su camino, y tantas habrá de adelantar este para alcanzar

al

al otro. Hágase pues esta regla de tres: Si el mas veloz camina mas que el otro 5 leguas en un dia, 60 leguas ¿en quántos dias las adelantará? Y hecha la resolucion, se hallarán 12 dias. A este modo se pueden formar y resolver muchas preguntas.

CAPITULO III.

DE LA ALIGACION.

Aligacion, es una liga, mezcla ó composicion de diferentes especies, de que resulta otra especie media. Llamamos aquí cosas *de diferentes especies* á las que tienen diferente valor, como si se mezcla oro de 24 quilates con otro de 15, resultará una especie media de mas estimacion que de 15, y de ménos que de 24.

De aquí se sigue, que en qualquiera aligacion han de concurrir á lo ménos seis términos; es á saber, tres especies y tres cantidades; esto es, las tres especies mayor, menor y media, que se declaran por sus precios ó valor, y las tres cantidades, una de la especie mayor, otra de la menor y otra de la media. Dixe, que á lo ménos ha de haber seis términos, porque se pueden mezclar tres y quatro especies, y entónces concurren mas de seis términos.

PROP. XV. Problema.

Las cantidades de las especies mayor y menor se han entre sí, como las diferencias que tienen respecto de la especie media recíprocamente.

Explicacion. Tiene un Platero oro de 22 quilates, especie mayor, y oro de 13 quilates, especie menor, y quiere mezclarlas de forma, que hagan una especie de oro media de 16 quilates. Digo que la cantidad que ha de poner de oro de 22 quilates, se ha con la que ha de poner de 13 quilates, como la diferencia de 13 á 16, que es 3, con la diferencia de 22 á 16, que es 6;

	22	3
16.		
	13	6

es-

esto es, que la cantidad que ha de poner de oro de 22 quilates, ha de ser como 3, y la que ha de poner de 13 quilates, ha de ser como 6.

Demonstracion. Lo que le falta al oro de 13 quilates para llegar á 16 quilates, que es 3, se ha de suplir de lo que excede á 16 quilates el oro de 22: luego se ha de poner tanta cantidad de 22 quilates, quanta baste á suplir ese defecto. Mas lo que excede el oro de 22 quilates á 16, que es 6, se ha de rebaxar con lo que le falta para 16 quilates al oro de 13: luego se ha de poner tanta cantidad de oro de 13 quilates, quanta baste á rebaxar este exceso; pues como lo que se ha de rebaxar el de 22 quilates, sea doblado de lo que se ha de subir el de 13, será tambien doblada la cantidad del oro que sirve para rebaxar, (qual es el de 13) que la cantidad del oro que sirve para subir, (qual es el de 22) y por consiguiente se habrán estas cantidades recíprocamente como las diferencias.

Todas las dificultades que pueden ocurrir en esta materia se resuelven fácilmente, entendida la siguiente regla general.

PROP. XVI. Problema.

Regla general de aligacion.

Las dos diferencias, una de la especie mayor y media; y otra de la especie menor y media puestas en cruz, son las partes de un todo mixto, igual á la diferencia que hay entre la especie mayor y menor.

Explícase la regla y el órden de executarla en este exemplo.

Un Platero tiene oro de 22 quilates, y otro de 13; quiere mezclarles de suerte, que la mezcla sea de 16 quilates. Pídese, ¿quánto pondrá de cada especie?

	22	3
16		
	13	6
		9

Operacion. Escríbase la especie mayor 22 arriba, y la menor 13 abaxo, y la media 16 al lado entre las dos, como se vé; y tiradas las líneas que se cruzan, réstense 13 de 16, y la diferencia 3 escríbase arriba, como guia la raya: résten-

se

se 16 de 22, y el residuo 6 póngase baxo: réstese el 13, especie menor, de 22, especie mayor, y será el residuo 9 igual á la suma de 3 y 6, que tambien es 9, y se escribirá debaxo de la raya. Digo pues, que en cada 9 onzas de mezcla, ha de haber 3 onzas de 22 quilates, y 6 onzas de 13 quilates; y con esto serán las 9 onzas de 16 quilates.

La prueba es, que multiplicando 22 por 3, y 13 por 6, la suma de los productos, que es 144, es igual al producto de 16 por 9, que tambien es 144.

Demonstracion. Las cantidades de la mezcla; esto es, 3 de 22 quilates, y 6 de 13 quilates, se han entre sí como las diferencias de las especies extremas á la media recíprocamente: luego (15) está bien hecha la mezcla.

PROP. XVII. Problema.

Resuélvense algunas qüestiones de aligacion.

1 *Quando en la qüestion se determina la cantidad de la mezcla, despues de haber hecho la sobredicha operacion, se formará una regla de tres para determinar la cantidad de cada especie, que ha de entrar en dicha mezcla.*

Qüestion 1. Pídense 36 onzas de oro de 16 quilates, compuesto de oro de 22 y de 13 quilates; y se dificulta, ¿quántas onzas han de ser del de 22, y quántas de 13? Obrese segun la regla sobredicha, y se hallará, que en 9 onzas de oro de 16 quilates entran 3 de 22 quilates, y 6 de 13. Hecho esto, formo la siguiente regla de tres: Si en 9 hay 3 de 22 quilates, luego en 36 habrá 12. Tambien si en 9 hay 6 de 13 quilates, luego en 36 habrá 24.

	22	3	12
16	×		
	13	6	24
		9	36

COROLARIO.

De aquí se colige, que en qualquiera aligacion son proporcionales 9 con 36, como 6 con 24, y como 3 con 12, y convirtiendo, 12 con 3, como 24 con 6, y 36 con 9. De que se infiere el modo de resolver qualquiera qüestion, en que se busque qualquiera de los dichos términos.

2 *Quando la una de las especies que se han de mezclar no tiene valor alguno, como quando se liga oro con cobre, ó vino con agua, se pondrá un cero en lugar de la especie menor.*

Qüestion 2. Tiene un Platero oro de 22 quilates, quiere baxarle á 16 quilates en cantidad de 66 onzas. Pídese, ¿quántas onzas mezclará de cobre? Dispónganse las especies como se vé; y restando se hallará, que la diferencia de cero y 16 es 16, escríbase arriba. Tambien la diferencia de 16 y 22 es 6, escríbase abaxo: 16 y 6 son 22. Digo pues, que en 22 onzas de mezcla, cuyo valor es 16 quilates, se han de poner 16 onzas de 22 quilates, y 6 onzas de cobre; y porque de esta calidad de oro se piden 66 onzas, hago la regla de tres: Si en 22 entran 6 onzas de cobre, luego en 66 entrarán 18 onzas, y las restantes 48 serán de oro.

	22	16	48
16			
	0	6	18
		22	66

3 *Quando se ha de subir el oro de punto, se obrará de la misma manera.*

Qüestion 3. De 66 onzas de oro de 16 quilates, que tiene liga de cobre, se ha de hacer oro de 22 quilates. Pídese, ¿quántas onzas de liga se dexarán consumir en el fuego? Dispuestos los términos, se hará la misma operacion antecedente, hasta hallar el 22, y luego se usará de esta regla de tres: Si 22 dan 66, luego 16 darán 48 onzas de 22 quilates; y así las 18 onzas las consumirá el fuego.

4 *Quando las especies que se han de mezclar fueren mas de dos, se harán dos ó mas aligaciones, segun fuere la multitud de las especies que se han de mezclar; y tendrá la qüestion en semejantes casos infinitas respuestas. Para proceder con acierto, se observarán los siguientes preceptos.*

Si

1 *Si las especies son 3 ó 4, se dividirá la cantidad de la mezcla en dos qualesquiera partes iguales ó desiguales: si las especies fueren 5 ó 6, se dividirá en tres partes: si 7 ó 8, se dividirá en 4, &c.*

2 *Con cada una de estas partes de la mezcla se aligarán dos especies, cuidando siempre que la una sea mayor, y la otra menor que la especie media ó valor que ha de tener toda la mezcla, tomando, si fuere menester, dos ó tres veces una misma especie. Con los exemplos se hará fácil la execucion.*

Qüestion 4. En que se mezclan quatro especies. Tiene un Platero oro de 22, de 20, de 15, de 13 quilates; quiere hacer 56 onzas de mezcla de 16 quilates. Pídese, ¿quánto tomará de cada especie? Divido primeramente el 56 en qualesquiera dos partes, y sean 36 y 20. Esto hecho, hago dos aligaciones, una de los 22 y 13 con las 36 onzas, y hallo (15) que en las 36 onzas ha de haber 12 onzas de 22 quilates, y 24 de 13, y serán las 36 de 16 quilates.

	22	3	12
16			
	13	6	24
		9	36

Hago despues otra aligacion de los 20 y 15 quilates con las 20 onzas de mezcla, y hallaré, que en las 20 onzas han de entrar 4 onzas de 20 quilates, y 16 de 15, y serán las 20 onzas de mezcla de 16 quilates; y concluiré diciendo, que en 56 onzas de 16 quilates hay 12 de 22, y 24 de 13, y 4 de 20, y 16 de 15 quilates. Hágase la prueba, multiplicando 22 por 12, 13 por 24, 20 por 4, y 15 por 16, y sumados los productos, será la suma 896 igual al producto de 56 por 16.

	20	1	4
16			
	15	4	16
		5	20

Aquí se vé claramente, que se pueden dar diferentes respuestas infinitamente, y qualquiera satisfará la qüestion; porque el 56 se puede dividir en dos partes diferentes infinitamente, y haciendo las aligaciones de las mismas especies en la forma dicha, se satisfará siempre la qüestion: y aun en cada division del 56 se pueden hallar quatro respuestas, por poderse variar la situacion de los términos de quatro maneras; esto es, aligando 22 con 13, y el 20 con 15. Tambien 22 con 15, y 20 con 13, y cada una de estas con el 36 ó con 20.

Qüestion 5. En que se mezclan tres especies. He menester 50 onzas de oro de 16 quilates; tengo oro de 22, de 20 y de 13 quilates: ¿quánto tomaré de cada especie? Parto las 50 onzas en dos partes, y sean 36 y 14, y hago dos aligaciones: la primera de 22 con 13, la segunda de 20 con el mismo 13, y acabadas las dos aligaciones hallo, que en las 50 onzas, para que sean de 16 quilates, ha de haber 12 onzas de 22 quilates, 6 onzas de 20 quilates; y del oro de 13 quilates ha de haber por una parte 24 onzas, y por otra 8, que son 32 onzas. Donde se vé, que con el 13 se han hecho dos aligaciones, y si fuere necesario se habian de hacer muchas mas.

	22	3	12
16	×		
	13	6	24
		9	36

	20	3	6
16	×		
	13	4	8
		7	14

Qüestion 6. En que se mezclan cinco especies. Si un Platero tiene oro de 24, de 20, de 18, de 14, de 12 quilates, y quiere hacer 50 onzas de oro de 16 quilates, ¿quánto tomará de cada una de las especies sobredichas? *Operacion.* Porque hay cinco especies, divido el 50 en tres partes á mi arbitrio, y sean 24, 18 y 8, y hago primeramente aligacion del oro de 24 quilates, y del de 12 en cantidad de 24 onzas: hago despues segunda aligacion de 20 quilates y 14 en cantidad de 18 onzas; y últimamente tercera aligacion de 18 quilates y 14 en cantidad de 8 onzas: y despues de las tres operaciones hallo, que en las 50 onzas de 16 quilates entran 8 de 24 quilates, 16 de 12, y 6 de 20,

	24	4	8
16	×		
	12	8	16
		12	24

	20	2	6
16	×		
	14	4	12
		6	18

	18	2	4
16	×		
	14	2	4
		4	8

4

4 de 18, y del de 14 quilates entran 16; esto es, por una parte 12, y por otra 4. Hágase la prueba, y se hallará ser verdad.

5 *Si se pidiere el valor de una mezcla, en que entran cantidades de diferentes especies, multiplíquese cada especie, que es lo mismo que cada valor por su cantidad, y la suma de los productos pártase por la suma de las cantidadas, y el quociente será el valor de la mezcla.*

Qüestion 7. Hay una mezcla ó composicion en que hay 8 onzas de oro de 24 quilates, 6 de 20, 4 de 18, 16 de 14, y 16 de 12 quilates. Pídese, ¿de quántos quilates será la mezcla? Multiplíquense los 24 quilates por las 8 onzas, los 20 por las 6, &c. y será la suma de los productos 800; partidos 800 por 50, que es la suma de las cantidades, será el quociente 16, y estos son los quilates de la mezcla.

6 *Con las reglas dadas se pueden resolver innumerables qüestiones; solo advierto, que en algunas, ántes de hacer la aligacion, es menester buscar el precio ó valor medio.*

Qüestion 8. Se han de comprar 800 hanegas de trigo por 24000 reales; hay trigo de 35 reales la hanega, de 32, de 28 y de 24. Pídese, ¿qué cantidad se habrá de tomar de cada especie, para que mezcladas hagan 800 hanegas, y valgan 24000 reales? Búsquese primero el precio medio, partiendo 24000 por 800, y su quociente 30 será el precio medio que se busca. Hallado este, dispónganse los términos, y hágase la aligacion, como en la qüest. 4, y quedará resuelta la qüestion.

CAPITULO IV.

DE LA FALSA POSICION.

REgla de falsa posicion, es la que supone un número conocido para hallar otro no conocido. Llámase *falsa posicion*, porque como el número supuesto casi nunca satisfaga la qüestion, suele llamarse *falso*; con mas propiedad se llamaria *número exemplar*, por servir de idea para hallar el número que se pide. Dos modos hay de de falsa posicion, *simple* y *compuesta*. La primera, por un solo número supuesto halla el verdadero. La segunda, supone dos, para encontrar con el que se busca.

PROP. XVIII. Problema.

Regla de falsa posicion simple.

La regla de falsa posicion simple se reduce á tres preceptos. 1 Tómese qualquiera número que sea apto para que en él se puedan exercitar las operaciones que pide la qüestion. 2 Exâmínese si es el número que se pregunta: y si acaso fuere el mismo, quedará satisfecha la qüestion; pero si no lo fuere, se formará una regla de tres, que es el tercero precepto, y se hallará el número que se busca.

Exemplo. Pídese, que el número 100 se divida en tres partes, que la primera sea dupla de la segunda, y esta sea tripla de la tercera; que es lo mismo que pedir tres números, el primero doblado del segundo, y este tres doble del tercero, que sumados hagan 100. Tomo arbitrariamente un número, y sea 2; este supongo ser el menor de los tres que se piden para mayor facilidad. Triplico el 2, y será 6 el segundo; duplico el 6, y tengo 12, sumo estos tres números 12, 6, 2, y hacen 20; y porque la suma habia de ser 100, busco otro número por regla de tres, diciendo: Si 20 vienen de 2, ¿de quántos vendrán 100? y hallo vienen de 10. Este pues será el número menor: luego el segundo es 30, y el mayor es 60. Con esto queda satisfecha la qüestion; porque he dado los tres números 60, 30, 10, de los quales 60 es doblado de 30, y este triplo de 10; y sumados hacen 100.

12	60
6	30
2	10
20	100

Demonstracion. Consta de la misma operacion ser proporcionales 20 á 2, como 100 á 10; tambien 20 á 6, como 100 á 30, y 20 á 12, como 100 á 60: luego componiendo será como 20 á 2, 6, 12 juntos, así 100 á 10,

30,

30, 60 juntos; 20 es igual á 2, 6, 12: luego 100 es igual á 10, 30, 60, que es el intento.

PROP. XIX. Problema.

Resuélvense algunas qüestiones por la falsa posicion simple.

Advierto lo primero, que todas las qüestiones que se pueden resolver por la posicion simple, se pueden resolver por la compuesta; pero no al contrario: y todas las qüestiones que resuelve la compuesta, puede resolver la Algebra; pero no al contrario. Y para no cansarse en valde, se observarán las reglas siguientes:

1 Siempre que el número que se busca se hubiere de multiplicar por sí mismo ó por alguna parte suya, ó una parte del mismo número por otra, ninguna de las falsas posiciones podrá resolver la duda, sí solamente la Algebra.

2 Las qüestiones que piden se sume ó reste algun número dado en la misma qüestion, no se pueden resolver por posicion simple, sino es que se puedan ántes reducir sumando ó restando dicho número, como constará de los exemplos.

Advierto lo segundo, que quando la qüestion procede por partes de un número incógnito, pidiendo que estas se sumen ó resten, será conveniente escribirlas en forma de quebrados; y reducidos estos á un comun denominador, se tomará este denominador por número supuesto para la operacion, y se obrará con gran facilidad.

Advierto lo tercero, que quando la qüestion pide que un número se divida en partes, que guarden unas con otras cierta proporcion, será bien suponer por la menor qualquiera número, y empezar por ella la operacion, como se hizo en el exemplo arriba puesto.

Qüestion 1. Pídese un número, que su mitad, su tercio y su quarto sumados hagan 52. *Operacion.* Las partes que se piden, expresadas como quebrados, y reducidos á un comun denominador, son $\frac{12}{8}$ y $\frac{6}{24}$ avos. Supongo pues, que el número que se pide sea 24, sumo su mitad,

tad, su tercio y su quarto, que son los mismos numeradores de los quebrados; esto es, 12, 8, 6; y suman 26; y porque habian de sumar 52, hago esta regla de tres: Si 26 habian de ser 52, luego 24 habian de ser 48, y este es el número que se pide; porque su mitad 24, su tercio 16, y su quarto 12, sumados hacen 52.

Qüestion 2. Pídese un número, que añadiéndole su mitad y su quarto, y mas 12, sea todo 852. *Operacion.* Resto primero de los 852 los 12, y quedan 840. Busco ahora un número, que añadiéndole su mitad y su quarto, sea todo 840. Supongo, que este número es el 12; añádole su mitad 6, y su quarto 3, y es todo 21; y porque habia de ser 840, digo: Si 21 habia de ser 840, luego 12 habian de ser 480, y este es el número que se pide; porque su mitad es 240, y su quarto es 120, y sumando 480, 240, 120, hacen 840, y añadiendo mas 12, es 852 como se deseaba.

Qüestion 3. Pídese un número, que añadiéndole sus $\frac{3}{4}$ y sus $\frac{2}{5}$, ménos 12, sea todo 246. *Operacion.* Añado primero 12 á 246, y será 258. Luego he de buscar un número, que añadiéndole sus $\frac{3}{4}$ y sus $\frac{2}{5}$, sea todo 258. Reducidos los quebrados á un comun denominador, son $\frac{15}{20}$ avos, y $\frac{8}{20}$ avos: supongo pues, que el número es 20, y añadiéndole 15 y 8, es todo 53. Digo pues: Si 43 dan 20, ¿qué darán 258? y sale 120, y este es el número que se busca, á quien añadiendo sus $\frac{3}{4}$, que son 90, y sus $\frac{2}{5}$, que son 48, salen 258: quito 12 como pedia la qüestion, y quedan 246.

Qüestion 4. Sea la que propone el Obispo Caramuel en esta forma:

Juno y Júpiter pesaban veinte minas,
y un quarto del primero,
y un tercio del segundo,
componen un tercero,
que pesa seis. Lucero
de la Escuela serás, si me adivinas
qué pesa cada uno,
Juno sin Júpiter, y Júpiter sin Juno.

Su-

Supongo que Juno pesaba 4 y Júpiter 6; con que ¼ del peso de Juno será 1, y ⅓ del peso de Júpiter será 2: los dos juntos hacen 3, peso del tercero; y porque habia de ser 6, digo: Si 3 habian de ser 6, ¿4 quántos habian de ser? y hallo que Juno pesaba 8 minas. Otra vez: Si 3 habian de ser 6, luego 6 que suponemos ser el peso de Júpiter, habrá de ser 12, y queda satisfecha la qüestion: porque 2 que es el quarto de 8, con 4 que es el tercio de 12, hace 6 peso de la tercera Estatua.

PROP. XX. Problema.

Regla de falsa posicion compuesta.

1 Supóngase qualquier número, y como si fuere el que se pregunta, guárdese en él todo el órden de la pregunta. Exâmínese si es ó no el verdadero: si lo fuere, quedará satisfecha la qüestion; pero si no lo fuere, se notará el error ó diferencia del número, hallado el verdadero. 2 Escríbase este error al lado del número supuesto, notando si se erró por exceso ó por defecto: el error por exceso se nota con este señal †, que significa *mas*; y el que es por defecto se señala con el señal —, que significa *ménos*. 3 Supóngase otro qualquier número, y procédase en él segun el tenor de la qüestion: exâmínese tambien si es ó no el que se busca, y si no lo fuere, nótese á su lado el error, de la misma suerte que en el primero. Entrambos números se han de escribir de suerte, que el un número supuesto esté debaxo del otro; y asimismo el error del uno debaxo del error del otro.

4 Hecho esto, ó los errores son iguales ó desiguales: si iguales, súmense los números supuestos, y la mitad de la suma será el número que se busca: si los errores son desiguales, se formará una regla de tres, cuyo primer término será la diferencia de los errores, el segundo, la diferencia de los números supuestos, y el tercero será uno de los errores qualquiera que sea. 5 El número que saliere por la regla de tres, se sumará con el número supuesto, cu-

cuyo error se tomó en la formacion de la regla de tres si dicho error lleva el señal —, y se restará si tiene el señal †, y la suma ó resta, será el número que se busca.

Advierto, que para hallar la diferencia de los errores, se ha de restar siempre el uno del otro; pero como se enseña en la Algebra, el restar, quando los señales son diferentes, es sumar; porque si uno debe † 4, y paga — 2, debe mas 6; esto es, debe los 4, y los otros 2 que quita con el ménos 2, y asimismo si uno debe — 6, y paga mas 4, se queda con — 10, porque ántes le faltaban 6, y despues le faltan los 4 que pagó. Esto se explicará mas en su lugar; basta por ahora saber, que quando los signos son diferentes, su diferencia se halla sumando los errores.

PROP. XXI. Problema.

Explícase todo lo dicho en un exemplo, y se hace demonstracion de la regla.

Caso I. *Quando los errores son iguales.* Pídese, que el número 62 se divida en tres partes, que la primera sea tanto como la segunda y tercera, mas 6, y la segunda sea doblada de la tercera, mas 4. Empiezo por el número menor, que es el tercero, y supongo que sea 5; dóblole, y será 10, y añadidos 4 será 14, y este será segun el tenor de la qüestion el segundo número. Sumo ahora 5 y 14, y serán 19; añadidos 6, serán 25, y este será el número primero. Sumo pues los tres 25, 14, 5, y serán 44; siendo así que habian de ser 62: luego en esta suposicion hay error de ménos 18. Escríbase pues este error al lado del 5 con la nota —, como se vé.

Suposiciones.		*Errores.*
5	—	18
11	†	18
16	8	

Supongo pues otro número, y sea 11, y suponiendo que sea el tercero, sigo el mismo órden que ántes, y será el segundo 26, y el primero 43. Sumo 43, 26, 11, y son 80; y porque habia de ser 62, veo que excede en 18; escribo pues 11, y á su lado el error † 18, co–

como se vé : y porque los errores son iguales, sumo los números supuestos 5 y 11, y es la suma 16, y su mitad 8 es el número verdadero; con que el segundo será 20, y el tercero 34, y la suma de los tres 62. La razon es evidente; porque los números 5 y 11 distan igualmente del número verdadero: luego este se halla en igual distancia de dichos extremos: luego es la mitad de su suma.

Caso II. *Quando los errores son desiguales, y en entrambos se peca por defecto: y por consiguiente sus errores llevan el señal —.* Sirva la misma qüestion por exemplo, y supongo como ántes el 5, cuyo error es — 18. Supongo otra vez 7, y siguiendo la qüestion hallo, que su error es — 6. La diferencia de las suposiciones es 2, y la diferencia de los errores es 12. Digo ahora: Si 12 dán 2, luego 18 error primero, dará 3, diferencia del 5, al número verdadero: y porque el 5 es ménos que el número verdadero, como lo manifiesta su error, que es — 18, se sumará 3 con 5, y la suma 8 es el número que se pide. Si se quiere usar de la otra suposicion 7, se hará la regla de tres: Si 12 dán 2, luego 6, error de la suposicion 7, dará 1, que sumado con el 7, da tambien 8.

Suposiciones.		*Errores.*
5	—	18
7	—	6
2		12

Caso III. *Quando en entrambas suposiciones se peca por exceso, y los errores son desiguales.* En la misma qüestion supongo, que el número que se pide es 13, y exâminándole hallo ser su error † 30. Supongo despues el número 10, y hallo que su errores † 12: la diferencia de las suposiciones es 3, y la de los errores es 18, y formo la regla de tres: Si 18 dan 3, luego 30 dan 5; y porque el error es †, resto 5 de 13, y tengo 8, número que se pide. Si quiero, hago otra regla de tres en la suposicion segunda, y saldrá lo mismo: Si 18 dan 3, luego 12 dan 2, que restados de 10 quedan 8.

Suposiciones.		*Errores.*
13	†	30
10	†	12
3		18

Caso IV. *Quando los errores son desiguales, y el uno pe-*

peca por exceso y el otro por defecto; y por consiguiente, el uno tiene el señal †, y el otro —. En la misma pregunta supongo 5, y hallo que su error es — 18. Supongo otra vez 12, y siguiendo el órden de la pregunta, hallo ser su error † 24. Hago la regla de tres: Si 42 dan 7, luego 18 darán 3, que añadidos al 5, (por ser su error ménos) es 8 el número que se pide. Tambien si 42 dan 7, luego 24 darán 4, que restados de 12 (por su error mas) quedan 8.

Suposiciones.		*Errores.*
5	—	18
12	†	24
7		42

Demonstracion de la Regla.

La demonstracion consiste en probar que son proporcionales la diferencia de los errores á la diferencia de las suposiciones, como el error á la diferencia del número supuesto y verdadero. Para demonstrar esto, se ha de suponer, que los errores de las suposiciones son proporcionales á los errores de los números que salen obrando con dichas suposiciones lo que se pide en la qüestion; como en este último exemplo las suposiciones son 5 y 12, cuyas diferencias hasta el número verdadero 8, son — 3 y † 4. Los números que han procedido de dichas suposiciones, segun el tenor de la qüestion, son 25 y 86, cuyos errores ó diferencias hasta el número 62 que habia de salir segun la qüestion, son — 18 y † 24. Digo pues, que son proporcionales estos quatro números ó diferencias — 3, † 4, — 18, † 24.

La razon es, porque segun el tenor de la qüestion solo se pueden hacer las quatro operaciones de sumar, restar, multiplicar y partir: y de estas, el sumar y restar no varía las diferencias; porque si por exemplo, á 8 y 12 se añade ó se quita un mismo número, las sumas ó restas siempre se diferenciarán en 4. Tampoco el multiplicar ó partir por un mismo número varía la proporcion en los productos ó quocientes: (Eucl. 17 *y* 18, *lib.* 7) luego se conservará la misma razon entre dichos números, y por consiguiente entre sus diferencias; luego dichas diferen-

cias

cias — 3, † 4, — 18, † 24, siempre serán proporcionales con razon de igualdad ó desigualdad.

Esto supuesto, el número que se busca (que ahora le supongo conocido) es 8, y siendo las suposiciones 5 y 12, son las diferencias de estas al número verdadero — 3 y † 4, las quales, por la razon sobredicha, difieren entre sí en 7; esto es, en tanto quanto se diferencian 5 y 12; y pues las diferencias — 3 y † 4 son proporcionales con los errores — 18 y † 24, será como — 3 con 7, diferencia entre — 3 y † 4; y así — 18 á 42, diferencia entre — 18 y † 24, y convirtiendo, como 7 con — 3, así 42 á — 18, y alternando, como 7 á 42, así — 3 á — 18, y otra vez invirtiendo, como 42 con 7, así — 18 con — 3, que es la regla dada.

LIBRO V.

DE LAS PROGRESIONES.

DEFINICIONES.

1 *Progresion, es una serie de números, que se van continuando con algun exceso ó diferencia proporcional.* Dos maneras hay de progresion, *Aritmética* y *Geométrica.*

2 *Progresion Aritmética, es una serie de números que se van excediendo con igual exceso.*

3 *Progresion Geométrica, es una serie de números que proceden en una misma razon de desigualdad.* Explícase en los siguientes exemplos.

Pro-

Progresiones Aritméticas	A	1	2	3	4	5	6
	B	1	3	5	7	9	11
Progresiones Geométricas	C	1	2	4	8	16	32
	D	1	3	9	27	81	243

La progresion A es Aritmética, porque todos los términos que la componen se van excediendo en la unidad. La progresion B es tambien Aritmética, por irse excediendo sus términos en 2. Las progresiones C y D son Geométricas, porque los términos de C proceden todos en razon dupla; y por consiguiente sus excesos están tambien en razon dupla: y los de la progresion D proceden en tripla, que son proporciones de desigualdad.

4 *Tanto la progresion Aritmética, como la Geométrica, puede ser ascendente ó descendente.* En la ascendente los términos van creciendo, como 2, 4, 6, 8, &c. ó como 2, 4, 8, 16, &c. En la descendente van menguando, como 8, 6, 4, 2, ó como 16, 8, 4, 2.

Estas progresiones, con las admirables propiedades que tienen, han enriquecido las principales materias de la Matemática. Trataré aquí lo mas preciso, remitiendo al Lector entre otros Autores al P. Gregorio de Sancto Vincentio, que trató de ellas con extrordinaria erudicion.

CAPITULO I.

DE LA PROGRESION ARITMÉTICA.

PROP. I. Problema.

Continuar una progresion Aritmética.

Operacion. Hállese el exceso en que los números se van continuamente excediendo, el qual se halla restando qualquiera de ellos del mayor que inmediatamente se sigue. Añádase este exceso continuamente al número des-
de

de el qual se ha de continuar la progresion, y se continuará la progresion ascendente; ó quítese continuamente del número sobredicho, y se habrá proseguido la progresion descendente.

Exemplo. Se ha de continuar esta progresion ascendente 1, 3, 5, 7. Réstense 3 de 5, ó 5 de 7, y se hallará ser la diferencia de los términos 2. Añádase 2 al 7, y saldrá 9, término siguiente. Añádase 2 al 9, y saldrá 11, y así infinitamente. Quiérese continuar esta progresion descendente 13, 11, 9. Hallada la diferencia 2 como ántes, réstese de 9, y quedarán 7; réstese otra vez de 7, y quedarán 5; réstese de 5, y quedarán 3; réstese de 3; y quedará 1, y ya no se puede restar mas. De que se colige, que las progresiones Aritméticas pueden infinitamente aumentarse, pero no infinitamente disminuirse, si no es que nos valgamos de términos negados, que son ménos que nada: y de esta suerte seria la progresion descendente sobredicha 11, 9, 7, 5, 3, 1 — 1 — 3, &c. De estos números defectivos tratarémos en la Algebra.

Demonstracion. Todos los términos de la progresion sobredicha se exceden en dos: luego añadiendo dos á un término, saldrá el mayor inmediato, y restando dos, ha de salir el inmediato menor.

PROP. II. Teorema.

En qualquiera progresion Aritmética la suma de los extremos es igual á la suma de qualesquiera dos términos distantes igualmente de dichos extremos.

Sea qualquiera progresion Aritmética A, B, C, D, &c. cuya diferencia sea Z. Digo que la suma de los extremos A y G es igual á la suma de B y F igualmente distantes de los mismos extremos.

Z 4

A, B, C, D, E, F, G

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27

Demonstracion. Si del extremo mayor G se quita la diferencia Z, quedarán F y G iguales, por exceder G á F en en sola la dicha diferencia. Tambien si la misma diferencia Z quitada, se añade al menor extremo A, quedarán A y B iguales: luego si á los iguales G y F se añaden los iguales A y B; esto es, A á G, y B á F, serán las sumas A † G y B † F iguales. Por la misma razon serán iguales las sumas B † F y C † E: luego A † G y C † E son iguales.

COROLARIO.

La suma de qualesquiera dos términos es igual á la suma de otros qualquiera dos términos igualmente distantes de los sobredichos, como D † G es igual á E † F.

PROP. III. Teorema.

En la progresion Aritmética de términos impares la suma de los extremos es igual al duplo del término medio.

Sea la progresion A, B, C, D, &c. de términos impares, cuya diferencia es Z. Digo que la suma de los extremos A y G es igual al término medio C doblado.

Z 3
A, B, C, D, E, F, G
1, 4, 7, 10, 13, 16, 19

Demonstracion. La suma de los términos C y E inmediatos á D es igual á la suma de los extremos A † G: (2) luego si probare, que la suma de C y E es igual al duplo de D, quedará probado, que la suma A † G de los extremos es igual al duplo de D. Pruébolo así: Si del término E se quita la diferencia Z, quedarán D y E iguales; y si la misma diferencia quitada se añade á C, serán C y D iguales: con que los tres C, D, E serán iguales: luego C y E son iguales á dos D.

COROLARIO.

El duplo de qualquier término es igual á la suma de qualesquiera dos términos igualmente distantes de dicho tér-

término: como el duplo de E es igual á C † G, y asimismo á D † F.

PROP. IV. Teorema.

En la progresion Aritmética, qualquier término restado de la suma de dos, dista tanto del uno, quanto el residuo dista del otro.

A, B, C, D, E, F, G
27, 23, 19, 15, 11, 7, 3

Sea la progresion Aritmética A, B, C, D, &c. y súmense los dos términos A y F. Digo que si de dicha suma se resta qualquier término, como por exemplo C distante dos términos de A, el residuo será el término D distante tambien dos términos de F.

Demonstracion. La suma C † D es igual á la suma A † F; si de la suma C † D se resta C, queda D: luego tambien si de la suma A † F se resta C, quedará D.

PROP. V. Teorema.

En qualquiera progresion Aritmética, el último término incluye tantas veces al exceso en que los términos se van excediendo, quantos son los términos, ménos uno; y ademas de esto, incluye al primer término.

Explicacion. Sea una progresion Aritmética, por exemplo, de quatro términos. Digo que el último incluye tres veces al exceso, y una vez al término primero.

Demonstracion. (1) Los términos de la progresion Aritmética se van formando, añadiendo continuamente el exceso; y así el segundo incluye al primero y un exceso: el tercero incluye al segundo y un exceso; esto es, al primero y dos excesos: el quarto incluye al tercero y un exceso; esto es, al segundo y dos excesos, ó al primero y tres excesos; esto es, tantos excesos como son los términos, ménos uno.

De estos Teoremas se colige la resolucion de quales-

quiera qüestiones que dependen de la progresion Aritmética, de las quales propondré aquí las mas principales á que pueden reducirse las demas.

PROP. VI. Problema.

Entre dos números dados, hallar uno ú muchos medios Aritméticamente proporcionales.

Regla. Réstese el número menor del mayor, el residuo pártase por el número de los medios que se piden, mas 1, y el quociente será la diferencia de los términos, que añadida continuamente al número menor de los que se propusieron, dará los medios que se piden.

5 8 11 14 17 20

Exemplo. Dados 5 y 20, se pide, que entre ellos se señalen quatro medios Aritméticos. Resto 5 de 20, y es su diferencia 15: parto 15 por 4, mas 1; esto es, por 5, y el quociente 3 es la diferencia de los términos, que añadida á 5 hace 8, añadida á 8 hace 11, añadida á 11 hace 14, añadida á 14 hace 17, que son los quatro medios que se piden.

Demonstracion. (5) El último término 20 incluye al primero, y tantos excesos quantos hay términos en la progresion, ménos 1: luego si del 20 se quita el primero 5, y el residuo le partimos por el número de los seis términos, ménos 1, ú de los quatro términos medios, mas 1, el quociente será la diferencia ó exceso de los términos, que añadida continuamente al menor, producirá dichos términos.

PROP. VII. Problema.

Dados el primero y último términos de una progresion Aritmética, y el número de los términos, hallar la diferencia en que se exceden.

Réstese como en la antecedente el término menor 5 del mayor 20, y pártase por el número de los términos, ménos 1, y el quociente será la diferencia que se busca. Consta de la antecedente.

Exem-

Exemplo. Distribuye uno por 6 dias ciertas limosnas: el primer dia da 5 reales, y el último da 20, y cada dia fué aumentando con iguales excesos las limosnas. Pídese, ¿quánto dió cada dia? *Operacion.* Réstese 5 de 20, y el residuo 15 pártase por 6 dias, ménos 1; esto es, por 5, y el quociente 3 añadido á los 5 que dió el primer dia, hará 8 que dió el segundo dia, &c. como en la *prop.* 6.

PROP. VIII. Problema.

Dados el primero y último términos de una progresion y el número de sus términos, hallar la suma de todos.

Operacion. Súmese el primero y último término: multiplíquese esta suma por el número de los términos; y la mitad del producto será la suma que se busca.

Exemplo. Pedro distribuye cierta cantidad de reales en los pobres, en progresion Aritmética, por espacio de 6 dias: el primero da 5 reales, y el último 20. Pídese, ¿quánto sea todo lo que ha distribuido? La suma de los términos dados 5 y 20 es 25; multiplíquese 25 por 6, número de los dias, y del producto 150 tómese la mitad 75, y esta es la suma de la progresion ú de las cantidades repartidas.

Demonstracion. En toda progresion Aritmética la suma de los extremos es igual á la suma de qualesquiera dos términos igualmente distantes de los extremos; (2) y si el número de los términos no fuere par, es tambien igual á la suma del medio tomado dos veces: (3) luego en la suma de toda la progresion hay tantas sumas iguales á la de los extremos, quanta es la mitad del número de los términos: luego multiplicando la suma de los extremos por todo el número de los términos, el producto será doblado de la suma de la progresion: luego su mitad será la suma que se pide.

COROLARIOS.

1 La misma suma se sabrá, multiplicando la suma de los extremos por la mitad del número de los términos; ó multiplicando la mitad de la suma de los extremos por

el número de los términos, como se colige de lo sobredicho.

2 En la progresion natural, como 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, si el mayor término 6 se multiplica por el que se habia de seguir si prosiguiera la progresion, que en este caso es el 7, la mitad del producto será la suma de todos los términos de la progresion: porque siendo el primer término cero, no hay que sumarle con el último; y así basta multiplicar al último por el número de los términos, que en esta progresion natural es tanto como el número que se sigue.

3 De lo dicho se colige la resolucion de las qüestiones semejantes á la del exemplo siguiente. *Exemplo*. Si un pozo que tiene 15 palmos de hondo, se abre por 36 libras, otro pozo que ha de tener 28 palmos de hondo, ¿por quánto se abrirá? *Operacion*. Porque quanto mas se profunda es mayor el trabajo, ántes de formar regla de tres se han de imaginar dos progresiones naturales, cuyo primer término sea cero, y el último en la primera sea 15, y en la otra 28. La suma de la primera progresion segun la regla dada, será 120, y la de la segunda será 406. Digo pues: si 120 valen 36, luego 406 valen 121 y $\frac{4}{5}$; esto es, 121 libras 16 sueldos. De esta suerte se sacará el valor de las hechuras de los edificios, cuyo valor sube quanto mas se levanta la obra.

PROP. IX. Problema.

En la progresion Aritmética, dado el número de los términos y el término menor y la diferencia, hallar el otro extremo.

Multiplíquese la diferencia dada por el número de los términos, ménos 1: súmese el producto con el término dado, y la suma será el último término que se busca.

Exemplo. Sea 8 el término menor de una progresion que llega á tener 10 términos, cuya diferencia es 5. Pídese el último término. Multiplico la diferencia 5 por 9, número de los términos quitado 1: el producto 45 sumado con 8 que es el término dado, da 53 último término.

Demonstracion. El último término incluye nueve veces la la diferencia 5, y una vez al término primero 8; (5) luego, &c.

Otro exemplo. Un Jardinero ha cogido de un manzano por espacio de 12 años manzanas en esta forma. El primer año 5; el segundo 60 mas que el primero; el tercero 60 mas que el segundo, y así en los demas. Pídese, ¿quántas manzanas cogió el año duodécimo? De las manzanas que cogió cada año se forma una progresion Aritmética, cuyo término primero es 5, la diferencia es 60, y el número de los términos 12. Obrese segun la regla, y se hallará, que el año 12 cogió 665 manzanas.

PROP. X. Problema.

En la progresion Aritmética dado el número de los términos, el término mayor y la diferencia, hallar el otro extremo.

Sea 20 el mayor extremo de una progresion Aritmética, que consta de 6 términos, cuya diferencia es 3. Pídese el menor extremo, Quítese 1 del número de los términos, y será 5. Multiplíquese 5 por 3, diferencia dada, y será el producto 15, que restado de 20, será el residuo 5 el término menor que se busca. Consta de lo dicho.

PROP. XI. Problema.

Dados el primero y último término y la suma de la progresion, hallar el número de los términos.

Sea el primer término 5, y el último 23, y la suma de la progresion sea 98. Pídese el número de los términos.

Operacion. Súmense los extremos 5 y 23, y de la suma 28 tómese la mitad 14; pártase 98 por 14, y el quociente 7 es el número de los términos.

Demonstracion. Multiplicando la suma de los extremos por la mitad del número de los términos, sale la suma de la progresion: (*prop.* 8. *cor.* 1) luego al contrario, si partimos la suma de la progresion por la mitad de la suma de

los

los estremos, se hallará el número de los terminos.

PROP. XII. Problema.

Dados el primero y último têrmino y la suma de la progresion, hallar el exceso ó diferencia.

La suma de una progresion es 75, el primer término es 5, y el último 20. Pídese la diferencia.

Operacion. Búsquese primero (11) el número de los términos, y se hallará ser 6: luego dados el primero y último término y el número de los términos, se hallará la diferencia. (7)

PROP. XIII. Problema.

Dados el primero y último têrmino y la diferencia, hallar el número de los têrminos.

El término primero de una progresion Aritmética es 5, el último es 20, la diferencia 3. Pídese el número de los términos.

Operacion. Réstese 5 de 20, y será el residuo 15. Pártase 15 por 3, diferencia de los términos, y será el quociente 5. Añádase la unidad, y será 6 el número de los términos. Consta de la *proposicion* 6.

PROP. XIV. Problema.

Dados el primero y último têrmino y la diferencia, hallar la suma de la progresion.

Dados 5 y 20 extremos de la progresion Aritmética, y la diferencia 3 de los términos, se busca la suma de toda la progresion.

Operacion. Hállese primero (13) el número de los términos, que será 6. Y conocidos el primer término 5 y el último 20 y el número 6 de los términos, se hallará (8) la suma 75.

PROP.

PROP. XV. Problema.

Dado uno de los extremos, el número de los términos y la suma de la progresion, hallar el otro extremo.

Sea 168 la suma de una progresion Aritmética de 12 términos, el último es 25. Pídese quál será el primero.

Operacion. Pártase 168 por 6, mitad del número de los términos, y el quociente 28 será la suma de los dos extremos: réstese 25, que es el último extremo, y restará 3 el primero.

Demonstracion. Consta de la *proposicion* 8, que la suma 168 sale de la multiplicacion de la suma de ambos extremos por la mitad del número de los términos: luego si 168 se parte por dicha mitad, el quociente será la suma del primero y último término; y por consiguiente, quitando el 1 de dicha suma, se sabrá el otro.

PROP. XVI. Problema.

Dados el primer término, el número de los términos y la suma de la progresion, hallar la diferencia.

Búsquese (15) el último término 25, y por la *propos.* 7, dados el primero 3 y el último término 25 y el número de los términos 12, se hallará la diferencia 2.

PROP. XVII. Problema.

Dados el último término, número de los términos y suma de la progresion, hallar la diferencia.

Hállese (15) el primer término 3 y con esto, dado el primero y último y el número de los términos, se hallará (7) la diferencia.

PROP. XVIII. Problema.

Dado uno de los extremos, el número de los términos y la diferencia, hallar la suma de la progresion.

Búsquese (9 v. 10) el otro extremo, y conocidos entrambos y el número de los términos, se hallará (8) la suma que se pide.

PROP. XIX. Problema.

En la progresion Aritmética, dados el número de los términos, la suma y diferencia, hallar los extremos.

Hay una progresion Aritmética de 12 términos, cuya diferencia es 2 y la suma 168. Pídense los extremos.

Operacion. Pártase la suma 168 por 6 mitad del número de los términos; y el quociente 28 será la suma de los extremos, como consta de la demonstracion de la *proposicion* 15. Multiplíquese ahora la diferencia 2 por el número de los términos, ménos 1; esto es, por 11, y el producto 22 será la diferencia entre el extremo mayor y menor; porque son las once diferencias que el extremo mayor incluye, á mas del extremo menor. (5) Réstese pues 22 de 28 suma de entrambos extremos, y quedará 6 duplo del extremo menor, y su mitad será el extremo menor 3, y añadiendo á 3 la diferencia del extremo mayor y menor que es 22, será 25 el extremo mayor.

Exemplo. Una fuente tiene 12 caños de agua, de los quales el segundo arroja 2 libras de agua mas que el primero, el tercero 2 libras mas que el segundo, y así los demas; de suerte, que todos juntos arrojan en una hora 168 libras de agua. Pídese, ¿quánta agua arroja en una hora el primero, y quánta el segundo?

Aquí se conoce la diferencia de los términos de la progresion, que es 2, el número de dichos términos, que es 12, y la suma de todos, que es 168: luego siguiendo la la regla sobredicha, se hallará, que el caño primero en una hora arroja 3 libras de agua, y el último 25. Si se pidiere quánto arroja cada uno, se irá añadiendo al primero la diferencia 2 continuamente. (1)

De lo dicho se colige el modo de resolver otras qüestiones de progresion Aritmética, que bien exâminadas vienen á reducirse á las sobredichas. Otras hay que necesitan de la Algebra, que dexo para su lugar.

CAPITULO II.

DE LA PROGRESION GEOMÉTRICA.

PROP. XX. Problema.

Continuar una progresion Geomêtrica.

PAra continuar una progresion Geométrica, se ha de saber primero su denominador; esto es, el denominador de la razon en que proceden sus números, el qual se halla partiendo qualquiera término por su inmediato menor. Hallado el denominador, se continuará la progresion Geométrica si es ascendiente, multiplicando el número de quien se ha de proseguir por el denominador hallado, y el producto será el término siguiente; y multiplicando este por el mismo denominador, se hallará el otro que se sigue, y así infinitamente.

Exemplo. Esta progresion 3, 6, 12 se continuará así: partiendo 12 por 6, es el quociente 2, que es el denominador. Multiplico pues 12 por 2, y el producto 24 es el término siguiente. Multiplico 24 por 2, y el producto 48 es el otro término, y así de los demas.

Pero si la progresion Geométrica fuere descendiente, se partirá el número de quien se ha de proseguir por el denominador, y el quociente será el término que se sigue, y partiendo otra vez este por el mismo denominador, el quociente será el otro término, y así infinitamente.

Exemplo. Esta progresion 48, 24, 12 se ha de proseguir descendiendo: parto 12 por el denominador 2, y el quociente 6 es el término que se sigue: parto 6 por 2, y el el quociente 3 es el otro término. La razon consta de la misma naturaleza de las razones.

Aquí se vé claramente, que qualquiera progresion Geométrica, tanto subiendo como baxando, puede proceder infinitamente.

PROP. XXI. Teorema.

En toda progresion Geométrica, el producto de los extremos es igual al producto de qualesquiera dos términos igualmente distantes de dichos extremos.

Explicacion. Digo que en la progresion A, el producto de 2 por 64, que es 128, es igual al producto de 4 por 32, que tambien es 128, y al producto de 8 por 16.

A 2, 4, 8, 16, 32, 64

Demonstracion. (2 del *lib.* 4. de este trat.) Por ser proporcionales 2 á 4, como 32 á 64, el producto de 2 por 64 es igual al producto de 4 por 32. Tambien porque 4 á 8 es como 16 á 32, el producto de 4 por 32 será igual al producto de 8 por 16: luego el producto de 2 por 64 tambien será igual al producto de 8 por 16, que es lo que se pretende probar.

PROP. XXII. Teorema.

En la progresion Geométrica que consta de términos impares, el quadrado del medio es igual al producto de qualesquiera términos igualmente distantes de dicho medio.

Explicacion. La progresion Geométrica B consta de cinco términos. Digo que el quadrado de 8; esto es, el producto que sale de la multiplicacion de 8 por 8 es igual al producto de 2 por 32, y al de 4 por 16.

B 2, 4, 8, 16, 32

Demonstracion. (3 *lib.* 4 *Arit.*) Por ser 2, 8, 32 proporcionales, el producto de 2 por 32 es igual al producto de 8 por 8. Lo mismo diré del producto de 4 por 16: luego es evidente la propuesta.

PROP.

PROP. XXIII. Teorema.

En toda progresion Geométrica, si el producto de dos términos se parte por otro qualquier término, el quociente será un término tan distante del uno de los términos multiplicados, quanto el partidor dista del otro.

Explicacion. Sea la progresion Geométrica A, y multiplíquese 64 por 2, y el producto 128 pártase por 32. Digo que el quociente 4 distará tanto del 2, quanto el 32 dista del 64; porque el quociente 4 multiplicando al partidor 32, restituye al dividendo 128: luego el producto de 4 por 32 es igual al producto de 2 por 64; luego como los productos igualmente distantes sean iguales, si el producto de 2 por 64 se parte por 32, ha de salir el otro término 4 igualmente distante.

A 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128

PROP. XXIV. Teorema.

El último término de qualquiera progresion Geométrica incluye tantas veces la suma de los demas términos, quantas unidades tiene el denominador, ménos una; y ademas de esto incluye una vez al primer término.

Explicacion. Sea la progresion Geométrica A, cuyo denominador es 3. Digo que el último término 972 incluye la suma de los restantes términos, que es 484 dos veces; es á saber, tantas quantas unidades hay en el denominador 3, ménos 1, y ademas de esto incluye al primer término 4 una vez.

A 4, 12, 36, 108, 324, 972

Demonstracion. El denominador 3 multiplicando el primer término 4, produce al 12, y como lo mismo sea multiplicar 4 por 3, que multiplicar 4 por 2, y añadir 4: (1, 2 Eucl.) luego 12 incluye al primer término 4 dos veces; es-

esto es, tantas quantas hay unidades en el denominador 3, ménos 1; y ademas incluye una vez al primer término 4. Tambien multiplicar 12 por 3 es lo mismo, que multiplicar 12 por 2, y añadir una vez el 12, porque de qualquier manera sale el producto 36. Y como el 12 resulte, como diximos, de la multiplicacion de 4 por 2 y suma del mismo 4, se sigue, que el tercer término 36 resulta de la multiplicacion del segundo por 2 y del primero por 2; esto es, de la multiplicacion de la suma del primero y segundo por 2, y de la suma del 4 término primero: luego 36 incluye tantas veces la suma de los precedentes 4 y 12, quantas unidades tiene el denominador 3, ménos 1; y ademas incluye al primer término 4 una vez. De la misma suerte se continuará la demonstracion, hasta probar, que el último termino 972 incluye dos veces la suma de los demas términos, y una vez al primero, que es lo que se habia de demonstrar.

PROP. XXV. Teorema.

En la progresion Geomêtrica, la diferencia entre el extremo menor y su inmediato, tiene la misma razon con dicho menor extremo, que la diferencia del extremo mayor y menor, con la suma de todos los términos precedentes al extremo mayor.

Explicacion. Sea la progresion Geométrica 4, 12, 36, &c. La diferencia del extremo 4 y su conseqüente es 8. La diferencia del extremo mayor 324 y el menor 4, es 320. La suma de los términos 4, 12, 36, 108, es 160. Digo que son proporcionales 4, 8, 160, 320.

4,	12,	36,	108,	324
8		160		320

Demonstracion. El último término (24) incluye tantas veces la suma de los demas términos, quantas unidades tiene el denominador de la progresion, ménos 1; é incluye una vez al primero. Tambien el segundo término incluye tantas veces al primero, quantas hay unidades en el denominador, ménos 1; é incluye asimismo una vez al primer término. Quitemos pues de entrambas partes el primer tér-

término, y quedará 320 diferencia del primero y último, que incluye tantas veces la suma de sus antecedentes 160, quantas unidades tiene el denominador, ménos 1; y quedará tambien 8 diferencia del primero y segundo, que asimismo incluye tantas veces al primero 4, quantas tiene unidades el denominador, ménos 1: luego la misma razon hay de 320 á 160, que de 8 á 4.

Este Teorema es el que demuestra Euclídes en la propos. 35 *del* lib. 9, *de quien deducen grandes arcanos en la progresion infinita el P. Gregorio á S. Vincentio y el P. Andres Tacquet, ambos de la Compañía de Jesus.*

COROLARIOS.

1 *Si los términos de la progresion proceden en razon dupla, el último término, ménos el primero, es igual á todos los precedentes; como en esta progresion* 1, 2, 4, 8, 16, *el* 16 *ménos* 1; *esto es*, 15 *es igual á la suma de todos los demas. La razon es, porque* 2 — 1 *á* 1 *es como* 16 — 1 *á la suma sobredicha*: 2 *ménos* 1 *es igual á* 1 : *luego* 16 *ménos* 1, *es igual á dicha suma.*

2 *Si los términos proceden en tripla, el último ménos el primero, es duplo de todos los términios procedentes. Si proceden en quadrupla, es triplo de dicha suma; y así de los demas. Demuéstrase como el corolario primero.*

De estos Teoremas se infiere bastantemente la resolucion de los Problemas de progresion Geométrica; pero añado el siguiente, que aunque supone noticias de la Aritmética superior, será de mucha utilidad.

PROP. XXVI. Teorema.

En toda progresion Geométrica, el segundo término es igual al producto del denominador por el término primero; el tercer término es igual al producto de la primera potestad del denominador por el término primero; el quarto es igual al producto de la segunda potestad del denominador por el primero; el quarto al de la tercera por el mismo primero; y así de los demas.

Sea la progesion Geométrica A, cuyo denominador es

2.

3. Multiplíquese 3 por sí mismo, y producirá 9 su potestad primera. Multiplíquese 9 por 3, y el producto 27 será su potestad segunda. Multiplíquese 27 por 3, y sale 81 su potestad tercera; y 81 por 3 hace 243 potestad quarta, como aquí se vé.

A	4	12	36	108	324	972
		3	9	27	81	243

Digo que el primer término 4 multiplicado por 3 hace el segundo término 12; tambien 9 multiplicado por 4 hace 36 término tercero: 27 multiplicado por 4 hace 108, término quarto: 81 multiplicado por 4 produce 324, término quinto, &c.

La razon de esto proviene de la misma naturaleza de la multiplicacion, y es semejante á la del Teorema antecedente; y porque seria prolixa su explicacion en números, la propongo solamente en los caracteres literales, para que el estudioso, despues de haber visto la logística de dichos caracteres, pueda entender con suma facilidad el fundamento de esta proposicion.

En lugar pues de los seis términos numéricos, substitúyanse los seis literales siguientes, cuyo denominador sea q.

Progresion. b, c, d, f, g, h
Denominador. q.

El término c procede de la multiplicacion de b por q: luego el segundo término c es lo mismo que qb. Asimismo el tercer término d procede de la multiplicacion de c por q; esto es, qb por q: luego es qqb, que es lo mismo que la primera potestad de q multiplicada por b. Tambien el quarto término f procede de la multiplicacion de d por q; esto es, de qqb por q: luego es qqqb; así se hallará ser g, lo que qqqqb, &c. luego los términos de la progresion salen de la multiplicacion continua del denominador, y sus potestades por el término primero, como aquí se vé.

Progresion. b, qb, qqb, qqqb, qqqqb, &c.
Potestades del denominador. q, qq, qqq, qqqq.

PROP.

PROP. XXVII. Problema.

Dados el primero y último términos de una progresion Geométrica y el denominador, hallar la suma de la progresion y el número de los términos.

Dados el primer término 4 y el último 972 y el denominador 3, se pide la suma de la progresion. Réstese el menor extremo 4 del mayor 972, y el residuo 968 pártase por el denominador 3, ménos la unidad; esto es, por 2, y el quociente 484 será la suma de la progresion, ménos el mayor extremo: añádase pues el mayor extremo 972, y será 1456 suma de toda la progresion.

Demonstracion. (25) El último término 972 incluye tantas veces la suma de los demas términos, quantas unidades tiene el denominador, ménos 1; y ademas, incluye al primer término: luego restando el primer término 4 del último 972, el residuo 968 incluirá dos veces la suma de los demas términos; esto es, tantas quantas unidades tiene el denominador 3, ménos 1: luego partiendo 968 por 2, el quociente es la suma de toda la progresion, ménos el último término; y añadido este, se sabrá toda.

Para hallar el número de los términos, multiplíquese el extremo menor por el denominador diferentes veces, hasta que salga el extremo mayor, y se tendrán todos los términos.

PROP. XXVIII. Problema.

En la progresion Geométrica, dados los extremos y la suma de la progresion, hallar el denominador y el número de los términos.

Sea el un extremo 4, y el otro 972, y la suma de todos 1456. Se pide el denominador. *Operacion.* Réstese el menor extremo 4 del mayor 972. Réstese tambien el mayor 972 de la suma 1456, y será el residuo 484. Pártase el un residuo por el otro; esto es, 968 por 484, y el quociente 2 será el denominador, ménos 1: añádase pues la unidad, y será 3 el denominador.

Demonstracion. Si la diferencia de los extremos se parte

te

te por el denominador, ménos 1, sale la suma de la progresion, ménos el mayor extremo: (28) luego si dicha diferencia de los extremos se parte por la suma de la progresion, ménos el mayor extremo, el quociente será, el denominador, ménos 1, así como porque partiendo 8 por 4 sale 2, partiendo 8 por 2 sale 4.

Hallado el denominador, se sabrá por la antecedente el número de los términos.

PROP. XXIX. Problema.

Dado el mayor extremo, la suma de la progresion y el denominador, hallar el menor extremo y el número de los términos.

Dados el mayor extremo 972, la suma 1456 y el denominador 3, se pide el menor extremo. *Operacion.* Quítese de la suma 1456 el mayor extremo 972. Quítese del denominador 3 la unidad, y quedarán 484 y 2. Multiplíquese 484 por 2, y el producto 968 réstese del mayor extremo 972 y el residuo 4, y será el menor extremo que se busca.

Demonstracion. Restando el mayor extremo 972 de la suma total 1456, el residuo 484 es la suma de los demas términos: y como (25) el mayor extremo incluya la suma de los demas tantas veces como hay unidades en el denominador, ménos 1, y ademas incluya al primer término; si el producto de 484 por el denominador, ménos la unidad, se resta del mayor extremo, es forzoso que el residuo sea el primer término. Tambien conocidos los extremos y el denominador, se hallará (28) el número de los términos.

PROP. XXX. Problema.

Dados el menor extremo, la suma de la progresion y el denominador, hallar el mayor extremo y el número de los términos.

Sea el menor extremo 4, la suma sea 1456, y el denominador 3. Búscase el mayor extremo. *Operacion.* Al de-

denominador quítesele la unidad, y será 2. Multiplíquese por este 2 la suma 1456, y será el producto 2912: añádase á este producto el extremo menor 4, y será 2916. Pártase esta suma por el denominador 3, y el quociente 972 será el mayor extremo.

Demonstr. (28) Para hallar la suma, se resta el menor extremo del mayor, y el residuo se divide por el denominador, ménos 1, y al quociente se añade el mayor extremo: luego si la suma se multiplica por el denominador, ménos 1, y al producto se añade el menor extremo, y todo se divide por el denominador, saldrá el mayor extremo, que es resolver lo que hizo la suma. Los términos se hallarán por la 28.

PROP. XXXI. Problema.

Dados el mayor extremo, número de los términos y el denominador, hallar el menor extremo y la suma.

El mayor extremo es 972, el número de los términos es 6, y el denominador 3. Pídese el menor extremo.

Operacion. Escríbase el denominador 3 cinco veces; esto es, tantas quantos son los términos, ménos 1, en esta forma: 3, 3, 3, 3, 3. Multiplíquese el primer 3 por el segundo, y el producto 9 por el 3 siguiente, y el producto 27 por el quarto 3, y el producto 81 por el último 3, y será el último producto 243. Pártase el último término 972 por 243, y el quociente 4 será el menor extremo.

Demonstr. (27) Si la potestad 243 se multiplica por el menor término 4, resulta el último y mayor extremo 972: luego partiendo este por 243, se hallará el menor término 4.

Para hallar la suma, réstese el menor extremo 4 del mayor 972, y el residuo 968 pártase por el denominador 3, ménos 1, ó por 2, y añadiendo el último término al quociente, se hallará la suma 1456.

PROP. XXXII. Problema.

Dados el menor extremo, el denominador y el número de los términos, hallar el mayor extremo y la suma.

Sea el menor extremo 4, el número de los términos

nos 6, y el denominador 3. Pídese el mayor extremo.

Operacion. Escríbase, como en la proposicion pasada, cinco veces el denominador, y hecha la multiplicacion continua, será el último producto 243. Multiplíquese 243 por el menor término 4, y el producto será el mayor extremo 972. La razon es la misma que la del problema antecedente. La suma se hallará por la *prop*. 28.

PROP. XXXIII. Problema.

Dado el mayor extremo y la suma de la progresion, hallar el menor extremo y el denominador.

Conocido el mayor extremo 972 y la suma 1456, se pide el menor extremo y el denominador.

Operacion. Réstese el mayor extremo 972 de la suma 1456, y será el residuo 484. Pártase el mismo mayor extremo 972 por este residuo 484, y será el quociente 2, y sobrarán 4, y estos 4 que sobran son el primer término, y el quociente 2 con una unidad, será el denominador 3.

Demonstracion. Restando el mayor extremo de la suma de la progresion, el residuo 484 es la suma de los demas términos, y como el último término incluya esta suma tantas veces, quantas unidades tiene el denominador, ménos 1; y ademas de esto, incluya una vez al primer término; (25) es forzoso, que partiendo el último término 972 por dicha suma 484, sea el quociente 2; esto es, el denominador, ménos la unidad, y sobren 4, que son el menor extremo.

PROP. XXXIV. Problema.

Dados el número de los términos, la suma de todos y el denominador, hallar los extremos.

Dados el número de los términos 6, y la suma 1456, y el denominador 3, se busca el menor extremo.

Operacion. Por ser el número de los términos 6, y el denominador 3, fórmese una progresion, cuyo primer término sea la unidad, y el segundo 3, de suerte, que tenga seis términos: súmese esta segunda progresion, y será la la suma 364. Pártase la suma 1456 por 364, y el quociente será el menor extremo 4.

A	4,	12,	36,	108,	324,	972
B	1,	3,	9,	27,	81,	243

Demonstracion. Sea la progresion de la pregunta A, y la que se ha formado en la solucion sea B. Esto supuesto, porque tanto los términos de la pregunta A, como los de B, proceden en tripla, por tener un mismo denominador 3, será como el primer término de A al segundo, así el primero de B al segundo, y así todos los demas; y alternando, como el primero de B al primero de A, así el segundo de B al segundo de A, y así de los demas: luego como 1, que es un antecedente, á 4 su conseqüente, así toda la suma de la progresion B, ó suma de los antecedentes de B, que es 364, á la suma 1456, que es la suma de los conseqüentes de A, que es lo mismo, que como 364 á 1456, así 1 á 4: y pues el tercer término de esta regla de tres, es 1 que no aumenta la multiplicacion, basta partir 1456 por 364, y el quociente será el menor extremo 4.

Conocido el menor extremo, el denominador y la suma, se hallará el mayor extremo por la *propos.* 31.

LIBRO VI.

DE LAS COMBINACIONES.

Combinacion, segun su etimología, no es otro, que una comparacion de cosas tomadas de dos en dos; pero aquí se toma mas universalmente por todas las partes, agregados ó conjunciones posibles, que resultan de un número de cosas determinado, segun las diferentes disposiciones que pueden tener las mismas cosas, comparadas entre sí ó con otras. Como por exemplo, en tres cosas hay muchas combinaciones; porque demas de poderse tomar cada una de por sí, se puede cada una juntar con qualquiera de las otras ó con entrambas.

Redúcense á dos especies, *absoluta* y *respectiva*. La *absoluta* considera solo las cosas que componen un número determinado, comparándolas entre sí como en el exemplo referido de tres. La *respectiva* considera las mismas cosas, comparándolas con otras, como si tres cosas de un género se comparan con seis de otro género.

Cada una de estas especies se subdivide en otras tres. La primera, quando las disposiciones que resultan, hecha la combinacion, se diferencian *en quanto á la substancia*, por tener alguna de las cosas que no se halla en la otra. La segunda, quando siendo las cosas las mismas, tienen, segun el órden que están colocadas, diferentes disposiciones *en quanto al lugar*. La tercera, que se compone de las dos, considera en qualquier número dado de cosas, demas de las disposiciones diferentes que pueden tener *en quanto á la substancia*, las que cada una de estas pueden tener segun la diferente situacion *en quanto al lugar*. Sirva de exemplo el mismo número de tres cosas, y sean A, B, C, en quien hay siete combinaciones *en quanto á la substancia*, A, B, C, AB, AC, BC, ABC; seis *en quanto al lugar*, ABC, BCA, CAB, CBA, BAC, ACB, y quince *en quanto á la substancia y lugar*, A, B, C, AB, BA, AC, CA, BC, CB, ABC, BCA, CAB, CBA, BAC, ACB. Y son todas las combinaciones posibles *absolutas*, las quales, si se comparan con otras de otro número, darán las *respectivas*.

A cada una de dichas combinaciones llamamos indiferentemente *elecciones*, y solo llamamos *conjunciones* á las que tienen mas de la unidad, las quales pueden ser de dos cosas, y se llaman de *binarios* ú de tres, y se llaman de *ternarios* ú de quatro, y se llaman de *quaternarios*, &c. Ademas de esto, las cosas mismas que se han de combinar, pueden ser de tres maneras; porque pueden ser ó todas diferentes, como ABC, ó todas semejantes, como AAA, ó parte diferentes, y parte semejantes, como AAB.

CA-

CAPITULO I.

DE LAS COMBINACIONES EN quanto á la substancia.

PROP. I. Problema.

Dado un número de cosas todas semejantes, hallar todas sus combinaciones en quanto á la substancia.

Regla. Véase quántas son las cosas semejantes, y tantas serán sus combinaciones. *Exemplo.* Sean dadas quatro AAAA. Digo que solo pueden tener quatro combinaciones substancialmente diferentes, quales son A, AA, AAA, AAAA. La razon es, porque siendo todos semejantes, no pueden tener otra diferencia que la repeticion: luego si tomo la cosa una vez ó dos veces ó tres, &c. hasta el número dado, serán sus combinaciones iguales al número.

PROP. II. Problema.

Dado un número de cosas todas diferentes, hallar todas sus combinaciones en quanto á la substancia.

Regla. Escríbase una progresion dupla desde la unidad, que conste de tantos términos como son las cosas, y la suma de dichos términos dará la suma de todas las combinaciones posibles.

Exemplo. Un Filósofo desea saber de quántas maneras se pueden combinar las quatro primeras qualidades, *calor*, *frialdad*, *humedad* y *sequedad*. Escriba en proporcion dupla quatro números, desde la unidad 1, 2, 4, 8, y en la suma de ellos, que es 15, hallará la de todas las combinaciones.

Demonstracion. Cada cosa que se añade á otro número de cosas, duplica sus combinaciones, y añade una mas; porque vuelve á contar todas las combinaciones de dicho número, suponiéndolas; añade otras tantas, juntándose con todas, y una mas,

c
1
f
fc
2
s
sc
sf
sfc
4
h
hc
hf
hfc
hs
hsc
hsf
hsfc
8

que

que es la misma cosa tomada de por sí: luego (25, 4 de este trat.) la suma de las combinaciones será igual á la suma de dicha progresion dupla. Haráse mas evidente en la presente Tabla de las quatro primeras qualidades, dispuesta segun el órden natural, en que se van aumentando las combinaciones, al paso que las cosas.

PROP. III. Problema.

Dado un número de cosas todas diferentes, hallar los binarios, ternarios, quaternarios, &c.

Regla 1. Escríbase una progresion Aritmética natural, que conste de tantos números como cosas. La suma de todos los números inferiores al de las cosas, dará los binarios; la suma de los binarios de dichos números, dará los ternarios; la de sus ternarios, los quaternarios; y así de los demas. *Exemplo*. Un Pintor tiene en su paleta cinco colores, blanco, azul, verde, colorado y pagizo; desea saber las mezclas ó combinaciones que puede hacer de ellos para la pintura. Escriba pues una progresion Aritmética natural hasta 5, que es el número de los colores, en esta forma, 1, 2, 3, 4, 5. Digo que la suma de los números inferiores 1, 2, 3, 4 que es 10, da los binarios de 5. Y porque por la misma regla los binarios de 4 cosas son 6, los de 3 son 3, los de 2, 1, sume todos estos binarios 1, 3, 6, y la suma 10 dará los ternarios de 5. Mas porque los ternarios de 4 por la misma regla son 4, y los de 3 son 1, sume estos ternarios 4, 1, y saldrán 5, que son los quaternarios de cinco cosas. Y finalmente, porque en 4 no hay mas que un quaternario, solo habrá en 5 un quinario: con que queda concluida la operacion, y sabidas todas las mezclas ó combinaciones que un Pintor puede hacer de cinco colores; esto es, 5 sencillos, 10 compuestos de 2, otros 10 de 3, 5 de 4, y 1 de todos, que hacen la suma de 31 colores diferentes. Esto se entiende tomando de cada color determinada cantidad; porque variada la cantidad, como esta puede ser mas ó ménos indefinidamente, resultarán infinitos colores, que aunque no se distinguirán substancialmente de los 31, se diferenciarán por la mayor ó menor vive-

za,

za, segun la mayor ó menor cantidad que mezclare de cada especie.

Demonstracion. Qualquiera cosa que se añade á un número de cosas determinado, por quanto se puede juntar con cada una de ellas de por sí, añade tantos binarios á los que habia producido dicho número, quantas son sus cosas; y pudiéndose decir lo mismo de todos los otros números, respecto de los próxîme menores hasta la unidad, serán los binarios de qualquier número iguales á la suma de todos los antecedentes. Esto mismo, y por la misma razon, diré de los ternarios respecto de sus binarios, y de los quaternarios respecto de los ternarios, &c. luego la suma de los números inferiores al de las cosas dará los binarios; la de los binarios, los ternarios; y así de los demas.

Regla 2. Supuesta la misma progresion Aritmética natural, multiplico el número mayor por el próxîme menor, y el producto partido por 2 dará en el quociente los binarios. Multiplico despues estos binarios por el número que se sigue, retrocediendo en la misma progresion, y el producto partido por 3 dará los ternarios; el producto de estos y del otro número que se sigue partido por 4 dará los quaternarios; y así de los demas, hasta llegar á la unidad con que empieza la progresion.

Exemplo. Danse para combinar quatro cosas, y por ellas escribo la progresion natural 1, 2, 3, 4. Multiplico 4 por 3, y el producto 12 partido por 2, da 6 binarios. Multiplico despues 6 por 2, que es el número que se sigue en la progresion retrocediendo; y el producto 12 partido por 3, da en el quociente 4 ternarios. Multiplico finalmente 4 por 1, y el producto 4 partido por 4, da en el quociente 1 quaternario; con el qual, sumadas todas las antecedentes, darán las 15 combinaciones posibles.

En esta forma se encontrarán las de qualquier otro número; advirtiendo siempre, que el partidor que se ha de tomar para encontrar los binarios es 2, para los ternarios 3, para los quaternarios 4, &c. y por qualquiera de dichas dos reglas se podrá formar y extender infinitamente la Tabla que se sigue.

Co-

Cosas.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10 &c.
Binarios.		1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,	45
Ternarios.			1,	4,	10,	20,	35,	56,	84,	120
Quaternarios.				1,	5,	15,	35,	70,	126,	210
Quinarios.					1,	6,	21,	56,	126,	252
Senarios.						1,	7,	28,	84,	210
Septenarios.							1,	8,	36,	120
Octonarios.								1,	9,	45
Nonarios.									1,	10
Denarios.										1

COROLARIO.

Para saber en qualquier número de cosas, quántas veces se hallará cada cosa en los binarios, quántas en los ternarios, &c. servirá la siguiente Regla. Obsérvese en el número próxîme menor quántas son las cosas, quántos los binarios, ternarios, &c. y diré, que cada cosa del número dado, se halla en sus binários tantas veces como cosas hay en el antecedente; y en los ternarios, tantas veces como hay binarios; y en los quaternarios, tantas como hay ternarios, &c.

PROP. IV. Problema.

Dado un número de cosas todas diferentes, hallar quáles sean en particular todas las combinaciones en quanto á la substancia.

Regla. Escríbanse en una línea las cosas, y juntando á cada una con cada una de las que se le siguen, saldrán los binarios: juntando cada binario con cada una de las cosas que se le siguen, saldrán los ternarios; y lo mismo de los quaternarios, &c. La razon es, porque los binarios resultan de juntarse una cosa con otra; los ternarios, de juntarse una con dos; los quaternarios, de juntarse una con tres, &c.

Exemplo. Un Maestro de Capilla desea saber las composiciones que puede hacer de las cinco consonancias, *tercera*, *quinta*, *sexta*, *octava* y *décima*. Sabrálo así: escriba por su órden los nombres de dichas consonancias, ó para mayor facilidad sus iniciales T, Q, S, O, D. Junte la T con cada

una

una de las quatro que se le siguen. La Q con las tres. La S con las dos. La O con una. Y tendrá los 10 binarios, y en ellos otras tantas composiciones de 3 voces. Si quiere hallar los ternarios, junte cada uno de estos binarios con las letras que se le siguen, omitiendo aquellos que por acabar en la última letra no se les sigue ninguna, y logrará otras 10 composiciones de 4 voces. Junte despues del mismo modo los ternarios con cada una de las letras que se le siguen, y hallará cinco quaternarios, y con ellos otras tantas composiciones de 5 voces. Y finalmente, juntando el primer quaternario con la D que se le sigue, omitiendo los demas por no seguírseles ninguna, tendrá un quinario ó composicion de 6 voces, y con ella todas las posibles, como aquí se vé.

TQ
TS
TO
TD
QS
QO
QD
SO
SD
OD
TQS
TQO
TQD
TSO
TSD
TOD
QSO
QSD
QOD
SOD
TQSO
TQSD
TQOD
TSOD
QSOD
TQSOD

PROP. V. Problema.

Dado un número de cosas en que hay algunas semejantes, hallar todas sus combinaciones en quanto á la substancia.

Regla. Escríbanse los números de cada cosa, segun mas ó ménos se repitieren, añadiendo á cada uno una unidad. Multiplíquense continuamente, y el producto, ménos 1, dará las combinaciones posibles.

Exemplo. Pregunta un Jugador, quántas son las combinaciones que pueden tener, en quanto á la substancia solamente, las piezas del axedrez: y por quanto las piezas son 16; esto es, 8 peones, 2 roques, 2 caballos, 2 arfiles, 1 Rey y 1 Dama, añada á cada uno de estos números una unidad, y escriba la serie siguiente: 9, 3, 3, 3, 2, 2, cuya multiplicacion continuada le dará en el producto 972 ménos 1, la respuesta; esto es, que todas las combinaciones posibles son 971.

Demonstracion. Sean tres cosas semejantes, á quienes se jun-

junte una diferente: como (1) las tres semejantes, sólo tengan tres combinaciones; y (2) cada cosa que se añade á qualquier número, añade otras tantas combinaciones, y una mas, resultarán dos veces tres combinaciones, y mas una, que es lo mismo, que el produćto de 4 por 2, ménos 1. Si la cosa que se añade á las tres, se repitiese dos veces, como (1) tiene solas dos combinaciones, y (2) cada una añadida á las tres, añade otras tantas, y una mas, serian sus combinaciones tres veces tres, y dos mas, que es lo mismo, segun la regla, que multiplicar 4 por 3, y quitar una del produćto. Por la misma razon, si se repitiese tres veces, serian sus combinaciones tres veces 4, y 3 mas, ó el produćto de 4 por 4, una ménos, que es lo mismo; y así de las demas.

PROP. VI. Problema.

Dado un número de cosas en que hay algunas semejantes, hallar los binarios, ternarios, &c.

Regla. Escríbanse primero las semejantes, sean de una ú de muchas especies, y despues las demas; y por ellas una progresion natural, que empiece de la unidad, y conste de tantos términos como cosas, repitiendo un mismo número, quando se repite una misma cosa: como si de quatro cosas, las dos se repiten tres veces, y otras dos, será la progresion 11122334. Sumo pues qualquiera de estos números, (excepto la primera unidad) ó con el binario del número próxîme menor, si el número que se sigue fuese igual; ó con su mismo binario, si el número que se sigue es mayor, y la suma dará el binario del número siguiente. Sumo despues los binarios de cada número, ó con el ternario del número próxîme menor, si el número que se sigue fuese igual; ó con su mismo ternario, si el número que se sigue es mayor, y la suma dará el ternario del número siguiente. Hago lo mismo de los ternarios respećto de los quaternarios, y así de los demas. Todo lo qual se hará con facilidad, suponiendo (1) que el primer binario, ternario, &c. siempre es unidad, como en esta Tabla.

Exemplo. Un Poeta Castellano, que regularmente no usa mas que de siete géneros de versos; esto es, de 5, de 6,

de

de 7, de 8, de 9, de 10 y de 11 sílabas, desea saber, quántas sean las especies de métros posibles; y mas en particular, quántos los Pareados, Tercetos, Quartillas, Quintillas, Sextinas, Septenas, Octavas, Novenas y Décimas. Disponga pues la progresion de siete números, repitiendo cada uno diez veces, en esta forma;

Cosas.	1	1	1	2	2	2	3	3	4
Bin.		1	1	2	3	3	5	6	9
Tern.			1	2	3	4	7	9	15
Quater.				1	2	3	7	10	19
Quint.					1	2	5	9	19
Senar.						1	3	6	15
Sept.							1	3	9
Oct.								1	4
Non.									1

1111111111 2222222222 3333333333 44, &c. y sume como en la Tabla precedente, y hallará 20772 métros diferentes; esto es, 28 especies de Pareados, 84 de Tercetos, 204 de Quartillas, 509 de Quintillas, 956 de Sextinas, 1742 de Septenas, 3223 de Octavas, 5419 de Novenas y 8616 de Décimas.

Demonstracion. Infiérese de las *propos.* 1, 2 *y* 5; porque cada número añadido á otro, supone los binarios del número próxîme menor, y añade tantos mas, quantas son las cosas con quienes se junta; y asimismo supone los ternarios del número próxîme menor, y añade tantos términos como son los binarios con quienes se junta: lo mismo diré de los quaternarios, quinarios, &c.

PROP. VII. Problema.

Dado un número de cosas en que hay algunas semejantes, hallar quáles sean en particular sus combinaciones en quanto á la substancia.

Regla. Escríbanse en una línea los nombres de las cosas ó sus iniciales, poniendo en primer lugar las que se repiten, y despues las otras; y en lo demas guárdese el método que se dió en la *propos.* 4, y se hallarán en particular todas las combinaciones. La razon consta de la proposicion citada.

Exemplo. Quiere el mismo Poeta saber quáles son las especies de Romances mas usados; y porque los géneros

de

de versos de que constan, son 4; esto es, de 5, de 6, de 7 y de 10 sílabas, y cada uno se puede repetir 4 veces; válgase por los 5, 6, 7 de los mismos números, como si fuesen cosas, y por el 10 de la D, y escríbales en una línea así 5555666677777DDDD: junte primero el 5 con todos los números ó letras que se le siguen, cuidando no repetir ninguna combinacion; y lo mismo del 6, del 7 y del D respectivamente á las que se le siguen, y logrará saber de paso, que son 10 los binarios ó pareados que pueden resultar de dichos versos. Pase mas adelante, y junte todos los dichos binarios, cada uno con los números ó letras que se le siguen, y hallará tambien de paso en 20 ternarios veinte especies de tercetos. Junte finalmente todos estos ternarios con las letras ó números que se le siguen, y hallarán en 35 quaternarios todas las especies de Romances.

55	555D
56	5566
57	5567
5D	556D
66	5577
67	557D
6D	55DD
77	5666
7D	5667
DD	566D
555	5677
556	567D
557	56DD
55D	5777
566	577D
567	57DD
56D	5DDD
577	6666
57D	6667
5DD	666D
666	6677
667	667D
66D	66DD
677	6777
67D	677D
6DD	67DD
777	6DDD
77D	7777
7DD	777D
DDD	77DD
5555	7DDD
5556	DDDD
5557	

PROP. VIII. Problema.

Dado un número determinado de cosas, hallar las combinaciones respectivas que pueden tener las mismas cosas entre sí en quanto á la substancia.

Regla. Halladas las combinaciones absolutas, dexando por inútil la que consta de todos los términos, multiplico las otras por dos, y el producto dará todas las comparaciones posibles.

Demonstracion. Cada combinacion de cosas se compara con todas las demas cosas que hay en el dicho número; luego las combinaciones se han de tomar dos veces, una co-

como fundamento, y otra como término de la comparacion.

Exemplo. Un Geómetra desea saber sobre el triángulo, que consta de tres lados y tres ángulos, quántos problemas se podrán formar cerca de si conocido uno ó muchos ángulos ó lados, se podrán hallar los lados y ángulos restantes; sabrálo así. Sean los tres ángulos ABC los tres lados DEF, y porque son seis cosas todas diferentes, busque (3) quántos son sus binarios, ternarios, &c. y hallará todo lo que se puede suponer conocido; esto es, cada uno de los seis términos de por sí, en que se supone conocida una cosa sola; 15 binarios, en que se suponen conocidas dos; 20 ternarios, en que se suponen conocidas tres; 15 quaternarios, en que se suponen conocidas 4; y 6 quinarios, en que se suponen conocidos cinco términos. Y en qualquiera de estas suposiciones se pueden formar otros tantos problemas, quantos son en cada uno los términos restantes; pero será menester apartar los inútiles, ó que no se pueden resolver, segun Trigonometría.

Práctica. Se hará muy fácil, si habiendo escrito (4) todas las combinaciones absolutas de 6 términos, se vuelven á escribir al reves: los quinarios enfrente de las unidades, los quaternarios enfrente de los binarios, &c. en esta forma:

A.bcdef	BD.acef	ABF.cde	CDE.abf	ACEF.bd
B.acdef	BE.acdf	ACD.bef	CDF.abe	ADEF.bc
C.abdef	BF.acde	ACE.bdf	CEF.abd	BCDE.af
D.abcef	CD.abef	ACF.bde	DEF.abc	BCDF.ae
E.abcdf	CE.abdf	ADE.bcf		BCEF.ad
F.abcde	CF.abde	ADF.bce	ABCD.ef	BDEF.ac
	DE.abcf	AEF.bcd	ABCE.df	CDEF.ab
AB.cdef	DF.abce	BCD.aef	ABCF.de	
AC.bdef	EF.abcd	BCE.adf	ABDE.cf	ABCDE.f
AD.bcef		BCF.ade	ABDF.ce	ABCDF.e
AE.bcdf	ABC.def	BDE.acf	ABEF.cd	ABCEF.d
AF.bcde	ABD.cef	BDF.ace	ACDE bf	ABDEF.c
BC.adef	ABE.cdf	BEF.acd	ACDF.be	ACDEF.b
				BCDEF.a

PROP.

PROP. IX. Problema.

Dados dos números determinados de cosas, hallar las combinaciones que pueden tener el uno respecto del otro.

Regla. Sáquense por las reglas antecedentes las combinaciones absolutas de cada número: multiplíquense las unas por las otras, y el producto dará todas las combinaciones respectivas ó comparaciones posibles.

Demonstracion. Cada combinacion de las de un número se puede comparar con todas las del otro: luego el producto de las unas por las otras las dará todas.

Exemplo. Un Médico desea saber el predominio que tienen las quatro primeras qualidades con los quatro humores, y para averiguarlo, pregunta, ¿de quántas maneras pueden mezclarse y compararse con ellos? Respóndole, que de 196 maneras; porque cada uno de los dos agregados de 4 tiene 14 combinaciones, (ademas de la que comprehende todos los términos) y 14 multiplicados por 14, proceden 196.

CAPITULO II.

DE LAS COMBINACIONES en quanto al lugar.

PROP. X. Teorema.

Las combinaciones de un número dado de cosas en quanto al lugar, son tantas como los lugares en que pueden colocarse.

D*Emonstracion.* Porque siendo el lugar la única diferencia que tienen, como consta de su definicion, tantas serán las diferentes combinaciones en quanto al lugar, quantos fueren diferentes los lugares.

PROP. XI. Teorema.

Quando las cosas son todas semejantes, no pueden tener combinaciones diferentes en quanto al lugar.

La razon es, porque ser las cosas semejantes, es lo mismo, mo, que una misma cosa repetida muchas veces: luego por mas que varíen los lugares, siempre queda una misma combinacion, como en estas tres AAA, en qualquiera parte que se coloque qualquiera de ellas, siempre quedan como ántes.

PROP. XII. Problema.

Dado un número de cosas todas diferentes, hallar todas las combinaciones que pueden tener en quanto al lugar.

Regla. Escríbase una progresion natural, que empezando de la unidad, termine en el número dado: multiplíquense continuadamente, y el último producto dará todas las combinaciones posibles.

Demonstracion. Respecto de la primer cosa, solo hay dos lugares donde pueda colocarse la segunda, que es primero y segundo: luego las combinaciones de dos cosas solo son dos; esto es, una vez 2. Mas en cada una de estas dos combinaciones hay tres lugares donde puede ponerse la tercera, que son primero, medio y último: luego las combinaciones de 3 son 6; esto es, 2 veces 3. Tambien en cada una de estas 6 combinaciones hay quatro lugares donde puede colocarse la quarta, que son ántes de la primera, entre la primera y segunda, entre la segunda y tercera, y despues de la tercera: luego las combinacienes de 4 cosas son 24, que es el producto de 6 por 4, y así de las demas: luego el producto de toda la progresion hasta el número dado, da todas las combinaciones posibles en quanto al lugar.

De lo dicho se colige el modo de hacer la Tabla combinatoria. Escríbase la serie natural de los números indefinidamente, y al lado de cada número póngase el producto de la multiplicacion continua de los números antecedentes hasta él, como aquí se vé.

1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600

Quie-

Quiero pues saber quántas combinaciones en quanto al lugar tendrán las cosas en qualquier número dado. Busco en la coluna primera el número de las cosas, y el número que tiene al lado en la segunda coluna, será el de todas las combinaciones posibles en quanto al lugar.

Exemplo. Un Poeta curioso compuso este verso latino:

Lux, nox; nix, pix; mel, fel; ius, vis; res, cui par nil.

Y pregunta, ¿de quántos modos pueden variarse sus palabras, sin que falte á las exâctas leyes de verso exámetro? Respóndole, que de 39.916800 maneras; porque quedando siempre en el antepenúltimo lugar, para la constancia del verso, la palabra *cui*, remate del pie dáctilo, quedan 11 palabras, que por ser monosílabas y largas, de qualquier modo que se varíen, sirven al espondéo. Busco pues en la Tabla el número 11, y á su lado hallo treinta y nueve millones, novecientos y diez y seis mil y ochocientos; y tantos son los modos con que se puede variar, sin faltar á las leyes de la Poesía.

De aquel otro verso Mariano tan celebrado:

Tot tibi sunt dotes, Virgo, quàm sidera cœlo.

Se suele decir, que sin faltar al métro, ni al sentido, se puede variar tantas veces como estrellas hay en el Cielo; esto es, 1022, y que á esto aludió el Poeta, quando quiso contar por estrellas las dotes de María Santísima; pero anduvo muy corto en todo, porque como prueba el Obispo Caramuel en su *Apolo Analéxico Proteo* 2, se puede este verso variar de 3728 modos, y aun á este número exceden sin comparacion los dotes y gracias que el Cielo depositó en la que fué Madre de todas ellas. Y pudiera haber dicho con mas verdad:

En tibi sunt dotes plures, quàm sidera cœlo.

PROP. XIII. Problema.

Dado un número de cosas todas diferentes, hallar quáles sean sus combinaciones en quanto al lugar.

Regla. Colocaráse cada cosa en los lugares que puede tener en las combinaciones antecedentes, segun ellas se se van multiplicando, y se demonstró en la *proposicion* 4.

Exemplo. Desea un curioso saber todos los anagramas posibles de este nombre ROMA. Diréle, que constando de quatro letras diferentes, tendrá 24, porque tantas son sus combinaciones. Encontrarálas así: Escriba la primera letra R, y porque solo tiene dos lugares donde puede colocarse la segunda letra O; esto es, primero y último, ponga en ellos la O, y resultarán de estas dos letras 2 combinaciones RO, OR. Tome ahora la tercera letra M, y colocándola en los tres lugares, primero, medio y último, que tiene cada una de dichas dos combinaciones, hallará otras 6 MRO, RMO, ROM, MOR, OMR, ORM. Tome finalmente la última letra A, y colocándola en cada una de dichas 6 combinaciones quatro veces, quantos son los lugares, primero, dos intermedios y último, habrá ya encontrado en 24 combinaciones otros tantos anagramas, como se sigue:

AMRO	ARMO	AROM	AMOR	AOMR	AORM
MARO	RAMO	RAOM	MAOR	OAMR	OARM
MRAO	RMAO	ROAM	MOAR	OMAR	ORAM
MROA	RMOA	ROMA	MORA	OMRA	ORMA

Del mismo modo procederá en qualquier otro número de cosas ó letras. Como si quisiese añadir á estas 24 combinaciones la letra N, colocándola cinco veces en cada una, por ser cinco los lugares, primero, tres intermedios y último, hallaria 120 combinaciones; y si á cada una de estas añadiese seis veces la letra I, por ser otros tantos los lugares, encontraria en 720 combinaciones otros tantos anagramas de este nombre ROMANI; y así de los demas.

PROP. XIV. Problema.

Dado un número de cosas en que hay muchas semejantes de una especie, hallar quántas combinaciones pueden tener en quanto al lugar.

Regla. Escríbase una progresion natural, que empezando de la unidad, termine en el número dado: nótese se el número de las cosas semejantes, y multiplicando continuamente los números que se le siguen en dicha progresion, el produćto dará las combinaciones posibles.

Exemplo. Ofrécense combinar las letras del Nombre de JESUS, y porque son cinco, escribo la progresion 1, 2, 3, 4, 5; pero como tiene dos semejantes, que son dos SS, empiezo la multiplicacion desde el número que se sigue al 2, que es el 3, y digo: 3 por 4 son 12, 12 por 5 son 60, y tantas son las combinaciones ó anagramas del dicho SS. Nombre. Si tuviera tres semejantes, como AMARA, empezaré la multiplicacion desde el 4 que se sigue al 3, diciendo: 4 por 5 son 20, y diré, que solo son 20 sus combinaciones ó anagramas; y así de los demas.

Demonstracion. Las cosas semejantes no producen por sí solas (11) diferentes combinaciones; pero dan como si fuesen desemejantes, muchos lugares donde pueden colocarse las que se les siguen: como dos AA dan tres lugares, primero, medio y último; tres AAA dan quatro, primero, dos intermedios y último: luego basta multiplicar los números siguientes, sin hacer cuenta de los números que corresponden á las semejantes.

PROP. XV. Problema.

Dado un número de cosas en que hay muchas semejantes de una especie, hallar quáles sean sus combinaciones en quanto al lugar.

Regla. Escríbanse primero las cosas semejantes, y colóquense las demas en los lugares que dexan las combinaciones antecedentes, segun ellas se van multiplicando.

Exemplo. Quiero saber las combinaciones ó anagramas del Nombre de MARIA: escribo primeramente las dos letras semejantes AA, y porque dexan tres lugares, primero, medio y último, coloco en ellos la M, y hallo 3 combinaciones, MAA, AMA, AAM, las quales dando cada una quatro lugares á la R; esto es, primero, dos intermedios y último, forman con ella otras 12, que son RMAA, MRAA,

MRAA, MARA, MAAR, RAMA, ARMA, AMRA, AMAR, RAAM, ARAM, AARM, AAMR; y como cada una de estas 12 dexó para la I cinco lugares, que son primero, tres intermedios y último, saldrán juntamente con ellas las 60 combinaciones ó anagramas posibles de todo el nombre de MARIA, que cada uno podrá escribírselas con facilidad, colocando la I en dichos lugares, como IRMAA, RIMAA, RMIAA, RMAIA, RMAAI, &c.

PROP. XVI. Problema.

Dado un número de cosas en que hay muchas semejantes de diferentes especies, hallar quántas combinaciones pueden tener en quanto al lugar.

Regla. Escrita la progresion natural hasta el número dado, y sabido su producto, obsérvense los números de cada una de las especies semejantes, y los que á cada uno corresponden en la Tabla combinatoria de la *prop.* 12: multiplíquense estos entre sí continuadamente, y partido por su producto el producto de toda la progresion, dará en el quociente todas las combinaciones posibles.

Exemplo. Un Músico desea saber de quántos modos podrá variar su canto con solas las seis voces, *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*. Respóndole, que como pueden repetirse infinitamente, son infinitos los modos con que se pueden combinar; pero limitando las repeticiones á solas dos, y suponiendo que cada voz se repita dos veces en el paso siguiente, *ut*, *ut*, *re*, *re*, *mi*, *mi*, *fa*, *fa*, *sol*, *sol*, *la*, *la*, digo, que este paso puede variarse de 7.453150 maneras. Escribo la progresion natural hasta el num. 12, que es el de las notas, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, y multiplicando continuadamente sus términos, hallo que su producto es 479.001600; y porque cada una de dichas seis notas se repite dos veces, observo en dicha Tabla el número de combinaciones que corresponde al 2, y hallando que es 2, multiplícole continuadamente seis veces, y por su producto 64 parto el de toda la progresion, y encuentro en el quociente los 7.484400 modos con que el Músico puede cantar dicho paso. Y este es el medio de que se valió el P. Atanasio Kirquer, para enriquecer con tanta novedad la Música en sus dos tomos de *Musurgia*.

Esta regla sin duda debió observar tambien el eruditísimo Caramuel, para adelantar su *Arte Poética* en nuevos y diferentes metros, segun la varia colocacion de los consonantes. Pone por exemplo, entre los muchos de su *Rítmica cap.* 3 *art.* 4, esta Redondilla:

La Ciencia calificada
es, que el hombre en gracia acabe,
que al partir de la jornada
aquel que se salva, sabe,
que el otro no sabe nada.

Y porque consta de cinco versos, tres de ellos consonantes en *ada*, y dos en *abe*, pregunta, ¿quántas especies puede haber de Redondillas, que tengan en cinco versos las mismas dos especies de consonantes? Y responde, que diez. Es así, porque tantas son las combinaciones de cinco cosas, en que hay tres semejantes de una especie, y dos de otra. Escribo la progresion 1, 2, 3, 4, 5, cuyo producto es 120: veo en la Tabla referida, que el número que corresponde al 3 es 6, y el que corresponde al 2 es 2: multiplico 6 por 2, y por el producto 12 parto 120, y hallo en el quociente 10 todas las variaciones posibles, y otras tantas especies de Redondillas. Lo mismo podrá hacer qualquiera en los demas géneros de metros, y enriquecer sobre manera la Poesía.

Demonstracion. La multiplicacion continuada de toda la progresion natural hasta el número dado, siendo todas las cosas diferentes, da (12) en el producto el número de sus combinaciones; siendo pues cierto, que las semejantes por sí no aumentan (11) combinacion alguna, será preciso (14) no hacer cuenta de su multiplicacion, ó descontarla, (que es lo mismo) partiendo todo el producto de la progresion por los productos que ellas tuvieran si fuesen diferentes.

PROP.

PROP. XVII. Problema.

Dado un número de cosas en que hay muchas semejantes de diferentes especies, hallar quáles sean sus combinaciones en quanto al lugar.

Regla. Colóquese cada cosa en los lugares que dexan las combinaciones antecedentes, como en la *prop.* 15, advirtiendo, que si en ellas hay ya alguna cosa semejante á la que se añade, no se ha de colocar en todos los lugares que tiene cada combinacion, sino en los que se siguen á la semejante.

Exemplo, el segundo de la proposicion antecedente. Sean las tres consonantes de una especie AAA, y las dos de otra BB. Escribo pues las tres AAA, y porque dexan quatro lugares donde poderse colocar la primera B, primero, dos intermedios y último, colócola en ellos como se sigue, BAAA, ABAA, AABA, AAAB. Para colocar la segunda B, observo quántos lugares se siguen despues de la primera B su semejante, en otras 4 combinaciones; y porque en la primera se siguen 4, en la segunda 3, y en la tercera 2, y en la quarta 1, coloco en ellas la segunda B, y escríbolas perpendicularmente por acomodarlas mas á la disposicion del metro, en esta forma;

B	B	B	B	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	B	B	B	A	A	A
A	B	A	A	B	A	A	B	B	A
A	A	B	A	A	B	A	B	A	B
A	A	A	B	A	A	B	A	B	B

De las quales, si quito la primera y última como inútiles, por tener (lo que no se sufre) tres consonantes consecutivos, quedan ocho especies de Redondillas de cinco versos, de que el Poeta podrá usar en sus composiciones.

PROP.

PROP. XVIII. Problema.

Dados dos números de cosas, hallar las combinaciones respectivas del uno al otro en quanto al lugar.

Explicacion. Dado qualquier número de cosas, pueden ellas combinarse entre sí segun todas las situaciones posibles, y á esta llamamos combinacion *absoluta*; pero prescindiendo de esta, y suponiendo á las mismas cosas invariables y siempre con la misma situacion entre sí, pueden mezclarse con otro número de cosas, y respecto de ellas colocarse diferentemente, y á esta llamamos *respectiva*; y aun esta puede ser de dos maneras, por poderse suponer invariables las cosas de entrambos números, ó solo las del uno.

Regla. Las cosas que se suponen invariables entre sí respecto de no tener mas que una combinacion, se han como si fueran semejantes: con que si las cosas de un número se suponen invariables, variándose las del otro, se han juntas, como un número de cosas en que hay muchas semejantes de una especie: y si las cosas de entrambos números se suponen invariables, se han juntas, como un número dado de cosas en que hay algunas semejantes de diferentes especies. Executo pues para la primera la operacion de las *prop.* 14 *y* 15, y para la segunda, la operacion de las *prop.* 16 *y* 17, y hallaré todas las combinaciones posibles.

Exemplo de la primera especie de combinaciones respectiva, en que uno de los números se supone invariable. Danle á un Maestro de Capilla este paso invariable, *mi, ut, re*, y sobre él le piden que componga con solas las otras voces, *fa*, *sol*, *la*, todos los contrapuntos posibles. Digo que para satisfacer á la peticion ha de componer 120 contrapuntos; porque se le dan seis notas, de las quales las tres por invariables se han como si fueran semejantes. Escriba pues la progresion 1, 2, 3, 4, 5, 6, y empezando (14) la multiplicacion continuada desde el 4 que se sigue al 3, hallará en el producto 120 contrapuntos, todos los quales, siendo períto el Maestro, haciendo que las

las notas sean mas ó ménos breves, ó valiéndose de puntos y de pausas, logrará que sean consonantes.

Exemplo manual de la segunda especie, en que los números que se comparan se suponen invariables. Un curioso impertinente preguntó en cierta ocasion, ¿de quántas maneras puede uno dar la mano á su amigo, que es lo mismo que preguntar, de quántos modos pueden enlazarse los cinco dedos de una mano con los cinco de la otra? Respóndole de 252, y lo pruebo así. Guardando los dedos de cada mano siempre la misma situacion entre sí, es lo mismo, que si se combinasen diez cosas, de las quales cinco eran de una especie, y cinco de otra. Escribo pues (16) la progresion 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, y hallado su producto 3.628800, busco en la Tabla combinatoria de la *prop.* 12 el número de combinaciones que corresponde al 5, y porque son 120, y hay cinco semejantes de dos especies, multiplico 120 por 120, y parto por su producto 14400 el de toda la progresion; y habiendo encontrado en el quociente 252 combinaciones de los dedos de una mano con los de otra, digo que tantos son los modos con que uno puede dar la mano á su amigo.

CAPITULO III.

DE LAS COMBINACIONES EN QUANTO á la substancia y lugar.

PROP. XIX. Problema.

Dado un número de cosas diferentes, hallar sus combinaciones en quanto á la substancia y lugar, con expresion de los binarios, ternarios, &c.

R*Egla*. Escríbase una progresion natural de números desde la unidad hasta el número dado; y multiplíquese continuadamente, retrocediendo desde el número mayor, hasta la unidad: digo, que el primer producto dará los binarios, el segundo los ternarios, el tercero los quaternarios, &c. y la suma de ellos, con el número

-ro de las cosas, dará todas las combinaciones posibles.

Exemplo. Un Filósofo desea saber los géneros que hay de mixtos, atendiendo solamente al mayor ó menor predominio de los elementos en cada uno. Disponga pues por ser quatro los elementos, la progresion natural 1, 2, 3, 4, y multiplíquela retrocediendo continuadamente, diciendo: 4 por 3 dan 12, y otros tantos mixtos imperfectos, que constan de solos dos elementos; 12 por 2 dan 24, y otros tantos mixtos no tan perfectos, que constan de tres elementos; y finalmente 24 por 1 dan 24, y otros tantos mixtos perfectos, que constan de todos los quatro; y conocerá por el órden con que estuvieren escritos el predominio de cada elemento.

Demonstr. Danse para combinar cinco cosas ABCDE. Por quanto cada una de estas cinco letras se puede juntar con qualquiera de las otras quatro, formará con ellas otros tantos binarios: luego los binarios de 5 saldrán de la multiplicacion de 5 por 4, y serán 20. Mas cada uno de estos 20 binarios se puede juntar con qualquiera de las otras tres letras, y formar con ellas otros tantos ternarios: luego los ternarios saldrán de la multiplicacion de 20 por 3, y serán 60. Mas cada uno de estos 60 ternarios se puede juntar con las dos letras restantes, y formar con ellas otros tantos quaternarios: luego los quaternarios saldrán de la multiplicacion de 60 por 2, y serán 120. Y finalmente, porque cada uno de estos 120 quaternarios se puede juntar con la unidad restante, y formar con ella los quinarios, los quinarios saldrán de la multiplicacion de 120 por 1, y serán 120. Y como de cada número de cosas se puede proporcionalmente demonstrar lo mismo, queda probada la proposicion.

PROP. XX. Problema.

Dado un número de cosas diferentes, hallar quáles sean en particular sus combinaciones en quanto á la substancia y lugar.

Regla. Se infiere de la demonstracion antecedente. Júntese cada cosa con cada una de las otras, y saldrán los

los binarios: júntese cada binario con cada una de las cosas restantes, y saldrán los ternarios, &c.

Exemplo. Un Metafísico quiere discurrir por las tres propiedades del Ente, UNIDAD, VERDAD y BONDAD, segun el método del iluminado Raymundo Lulio. Válgase para mayor facilidad de las iniciales U, V, B, y junte cada una con las otras dos, y saldrán 6 binarios, UV, VB, VU, VB, BU, BV, y con ellas otros tantos sugetos sobre que poder discurrir, haciendo que la última letra sea genitivo de posesion; y así podrá inquirir: ¿Qué cosa sea la Unidad de la Verdad? la Unidad de la Bondad? la Verdad de la Unidad? la Verdad de la Bondad? la Bondad de la Unidad? y la Bondad de la Verdad? Junte ahora cada uno de dichos 6 binarios con la letra restante, y resultarán otros 6 ternarios, UVB, UBV, VUB, VBU, BUV, BVU, y con ellos otras tantas qüestiones, adjetivando la segunda letra, y poniendo en genitivo la tercera; y así podrá inquirir: ¿Qué cosa sea la Unidad Verdadera de la Bondad? la Unidad Buena de la Verdad? la Verdad Una de la Bondad? la Verdad Buena de la Unidad? la Bondad Una de la Verdad? y la Bondad Verdadera de la Unidad? Tambien se podrian formar otras 6 qüestiones, haciendo verbo á la segunda letra, y preguntar con el mismo órden: ¿Si la Unidad Verifica la Bondad del Ente? si la Unidad Bonifica (ó hace Buena) la Verdad? si la Verdad Unifica (ó hace Una) la Bondad, &c. Y este ó semejante, es el método con que proceden en su Arte Magna los Lulistas, y que tanto adelantó en su *Arte Combinatoria* el P. Atanasio Kirquer.

PROP. XXI. Problema.

Dado un número de cosas en que hay algunas semejantes, hallar todas sus combinaciones en quanto á la substancia y lugar.

Regla. Sáquense por la *prop.* 7 de este libro, quáles sean en particular sus combinaciones, en quanto á la substancia y lugar: luego se buscarán en cada una de ellas por la

prop.

prop. 14, 15 ú 16 las combinaciones que tienen en quanto al lugar; y la suma de estas dará todas las combinaciones.

Exemplo. Un Cabalista, que por versado en la Sagrada Escritura sabe los misterios, que Galatino y otros han descubierto en las letras del Santo Nombre de Dios IEHOVAH, y lo mucho que ha dado que discurrir una sola que añadió Dios al de Abram, mandando que se llamase Abraham; desea saber, para encontrar otros nuevos, las sílabas y nombres que pueden resultar de la varia particion y colocacion de las quatro letras que le componen en el idioma Hebreo, Iod, He, Vau, y otra vez He. Sabrálo así: Busque primero por la *prop.* 7 las combinaciones que pueden tener en quanto á la substancia quatro cosas, en las quales hay dos semejantes, y halladas como en la márgen, escríbase al lado de cada una el número de combinaciones, que por la *prop.* 15 le corresponden en quanto al lugar: y la suma de estos números da las 34 combinaciones, que las letras del Santo Nombre de Dios pueden tener en quanto á la substancia y lugar; y nuevo campo al Cabalista para discurrir otros misterios, como huya de los peligros de supersticion en que suelen incurrir los Rabinos, por el abuso de la Cábala.

1,	H
1,	V
1,	I
1,	HH
2,	HV
2,	HI
2,	VI
3,	HHV
3,	HHI
6,	HVI
12,	HHVI
34	

PROP. XXII. Problema.

Dado un número de cosas en que cada una se repite indefinidamente, hallar todos sus binarios, ternarios, &c. en quanto á la substancia y lugar.

Quando las cosas se repiten indefinidamente; esto es, tantas veces quantas se quiere sin término, no le tienen sus combinaciones, porque son infinitas como la repeticion; pero aunque la suma de todas sea infinita, los binarios, ternarios, &c. son determinados, y para ellos sirve la regla siguiente.

Re-

Regla. Multiplíquese por sí mismo el número de las cosas, y el producto dará sus binarios: si se vuelven á multiplicar por este mismo producto, el segundo producto dará los ternarios; y si otra vez se multiplican por el segundo producto, el tercer producto dará los quaternarios: y así de los demas infinitamente.

Demonstracion. Por quanto se repiten todas las cosas, cada una se podrá juntar no solo con las demas, sino con ella misma repetida; y así, los binarios en cada una son tantos como las cosas: luego multiplicado el número de las cosas por sí mismo, el producto dará los binarios; y como cada binario de estos se puede juntar no solo con las demas cosas, sino con aquellas mismas de que se compone repetidas, los ternarios que cada binario produce, serán tantos como las cosas: luego la multiplicacion de los binarios (que es el primer producto) por el número de las cosas, dará los ternarios. Lo mismo probaré de los quaternarios, quinarios, &c.

Exemplo. Un Gramático deseoso de adelantarse en la Poesía Latina, pregunta, ¿quántos géneros hay de *pies* que pueden servir á los versos? Respóndole, que no habiendo usado los Poetas, así Griegos como Latinos, de mayores *pies*, que de seis sílabas, serán todos los géneros de pies 126. Y por quanto las especies de sílabas solo son dos, larga ó breve, podrá hacer la prueba con el número 2, multiplicándole hasta cinco veces por sus potestades Geométricas, en esta forma: 2, 4, 8, 16, 32, 64, y habrá hallado en el número 2 los pies de una sílaba: en el 4 los de dos: en el 8 los de tres: en el 16 los de quatro: en el 32 los de cinco: y en el 64 los de seis sílabas; y en la suma de estos números todos los géneros de *pies* que han usado los Poetas.

PROP. XXIII. Problema.

Dado un número de cosas que se repitan indefinidamente, hallar quales sean en particular sus binarios, ternarios, &c.

Regla. Se infiere de la antecedente. Júntese cada cosa con todas, y saldrán los binarios. Júntese cada binanario con todas las cosas, y saldrán los ternarios, &c.

Exemplo 1. Un Dialéctico desea saber todas las especies y modos de argüir. Suponiendo, que para ello se ha de valer de proposiciones, las quales unas son universales, otras particulares, y cada una de estas puede ser ó afirmativa ó negativa, valdráse por la universal afirmativa de la A, por la universal negativa de la E, por la particular afirmativa de la I, y por la particular negativa de la O, y tendrá quatro términos combinables AEIO.

Junte pues cada una de estas letras con todas las quatro, AA, AE, AI, AO; EA, EE, EI, EO; IA, IE, II, IO; OA, OE, OI, OO, y hallará en estos 16 binarios otros tantos entimemas. Para encontrar los silogismos, bastaria juntar cada uno de dichos entimemas con las mismas quatro letras, así: AAA, AAE, AAI, AAO; AEA, AEE, AEI, AEO, &c. pero como ni de dos premisas afirmativas negativa, ni de una negativa afirmativa, ni de una particular, se infiere universal, ni de dos particulares, ni de dos negativas se puede inferir cosa alguna, de los 64 silogismos solo quedan útiles 12, que son: AAA, AAI, AII, AEE, AEO, AOO, EAE, EAO, EIO, IAI, IEO, OAO. De los quales, los 6 que tienen la mayor universal y menor afirmativa, sirven para la primer figura: los 6 que tienen la mayor universal y conseqüencia negativa, para la segunda: los 6 que tienen la menor afirmativa y conseqüencia particular, para la tercera: y los 6 que tienen la mayor afirmativa y menor universal, para la quarta; y habrá encontrado los 24 modos de silogismos, como se siguen:

1 *fig.*	2 *fig.*	3 *fig.*	4 *fig.*
AAA	AEE	AAI	AAA
AAI	AEO	AII	AAI
AII	AOO	EAO	IAI
EAE	EAE	EIO	AEE
EAO	EAO	IAI	AEO
EIO	EIO	OAO	IEO

Todos estos 24 silogismos concluyen directamente: y si la conseqüencia de cada uno se convirtiese, resultarian de ellos otros tantos silogismos indirectos.

Exemplo 2. Un Impresor desea saber, ¿quántos son los vocablos que podrá componer de todas las veinte y tres letras del-

del Abecedario? Responderále la multiplicacion del mismo número 23 por todas sus potestades, que podrá componer vocablos de dos letras 529, de tres 12167, de quatro 279841, de cinco 6.436343, de seis 148.035889, de siete 3404.825447, de ocho 78310.985281, de nueve 1801252.561463, y de diez 41428808.913549, &c. Y si me vuelve á preguntar, deseoso de saber todos los idiomas posibles, ¿quáles sean en particular esos vocablos? le responderé, que si compusiese en cada segundo de tiempo diez vocablos; esto es, 3600 en cada hora, y estuviese componiendo sin cesar de dia ni de noche treinta millones de millones de años, no habria acabado de componer aun solos los vocablos de diez letras: y por consiguiente, que el saberlos en particular, es noticia reservada á solo Dios, *cujus sapientiæ non est numerus*.

PROP. XXIV. Problema.

Dados dos números de cosas, hallar las combinaciones respectivas del uno al otro, en quanto á la substancia y lugar.

Regla. Sáquense las combinaciones de cada uno de los números en quanto á la substancia y lugar, ó por la *prop*. 19 si todas las cosas fuesen diferentes, ó por la 21 si hubiese algunas semejantes, ó por la 22 si todas se repiten indefinidamente: luego siguiendo las reglas del *cap*. 2, se verá en cada una de las combinaciones del un número las que tienen en quanto al lugar, juntas con las del otro; y la suma de estas dará todas las combinaciones respectivas.

Exemplo. El mismo Impresor, mal satisfecho del exemplo pasado, en que por no haber hecho discrecion de consonantes y vocales, resultaron muchas composiciones de solas consonantes, los quales no siendo pronunciables de por sí, no merecen el nombre de vocablos, desea saber los vocablos que pueden resultar de la mezcla de consonantes y vocales. Sabrálos así. Porque las consonantes son 20, y las vocales 5, sepa primero por la *prop*. 22, quántas son sus

sus combinaciones en quanto á la substancia y lugar; y hallando que los binarios de las 5 vocales son 25, los ternarios 125, los quaternarios 625, los quinarios 3125, &c. Y que los binarios de las 20 consonantes son 400, los ternarios 8000, los quaternarios 160000, los quinarios 3.200000, &c. Combine despues en quanto al lugar, segun las reglas del *cap.* 2, las de las consonantes juntas con las de las vocales, y al contrario; y hallará vocablos pronunciables de dos letras; esto es, una consonante y otra vocal 200; porque tantos son 20 por 5, tomados dos veces. De tres letras; esto es, dos consonantes con una vocal, ú dos vocales con una consonante 7500; porque tantos son 400 por 5, y 25 por 20, tomados tres veces. De quatro letras; esto es, de tres consonantes con una vocal, de tres vocales con una consonante, y de dos consonantes con dos vocales 230000; porque tantos son 8000 por 5, y 125 por 20, tomados quatro veces, y 400 por 25, tomados seis; y así de los demas.

COROLARIO.

De lo dicho en todo este libro se infiere, con quánta razon el iluminado Raymundo Lulio, el P. Atanasio Kirquer, el P. Sebastian Izquierdo y otros Autores, llaman á la Arte Combinatoria, Arte de las Artes, Ciencia de las Ciencias, y la verdadera Lógica y modo de saber.

TRA-

TRATADO III.

DE LA
GEOMETRÍA PRÁCTICA.

COmprehende este tratado los mas principales Problemas de la Geometría, sin que se omita alguno de los que se pueden desear en un perfecto Geómetra. Todos se demuestran por la Geometría Elementar, que convendrá tenga vista primero el estudioso, para que consiga la noticia fundamental de este tratado, y con ella se habilite para las operaciones que suelen ser no solo convenientes, sino necesarias, así en lo Político, como en lo Militar.

LIBRO I.

DE LA FORMACION Y DIVISION
DE LÍNEAS Y ÁNGULOS.

PROPOSICION I.

Levantar una perpendicular sobre la extremidad de una línea dada. (*fig.* 1.)

PÍdese, que sobre la extremidad B de la recta dada AB, se levante una perpendicular.

Modo 1. Póngase el pie del compas en qualquiera pun-

punto C sobre la recta AB: y con la distancia CB hágase una porcion de círculo, que cortará la recta AB en D. De la interseccion D por el punto C tírese la recta DCE, que cortará el arco en E: tírese la EB, y será la perpendicular que se pide.

Demonstracion. El ángulo B está formado en el semicírculo: luego (31, 3) es recto, y EB perpendicular.

Modo 2. Del punto F, (*fig.* 2.) con qualquier abertura de compas descríbase el arco GHM; y haciendo centro en G, descríbase con la misma abertura el arco FH, y hágase el arco HM igual á GH; y de los puntos H y M descríbanse los arcos que se corten en N: tírese la recta NF, y esta será perpendicular á la extremidad de la recta IF.

Demonstracion. Si se tirasen unas rectas HG, HF, quedaria descrito un triángulo equilátero: (1, 1) luego (32, 1) el arco HF es el tercio de un semicírculo: luego es 60 grados; y asimismo HM es 60 grados: luego su mitad HO es 30: luego todo GO es 90 grados; y por consiguiente la NF es perpendicular.

Los demas Problemas de líneas perpendiculares quedan resueltos en la Geom. Elem. lib. 1.

PROPOSICION II.

Tirar una paralela por un punto dado. (*fig.* 3.)

Este Problema queda resuelto en la *prop.* 31 *lib.* 1 de la *Geometría Elementar*; pero se resuelve con mayor brevedad del modo siguiente.

Por el punto dado D se ha de tirar una paralela á la línea dada AB.

Operacion. Escójase á discrecion el punto C en la línea AB ó fuera de ella. Hágase centro en C, y con la distancia CD hágase un arco, que corte á la línea AB en dos puntos A y B: tómese la distancia AD, y pásese desde B á E: tírese la DE, y será paralela á AB. La razon es clara.

PROP.

PROPOSICION III.

Por un punto dado fuera de una línea, tirar una recta que haga con dicha línea un ángulo igual á otro ángulo dado. (*fig.* 4.)

Sea dada la línea XZ, y fuera de ella el punto E. Pídese; que por E se tire una recta, que concurriendo con la XZ, forme con ella un ángulo igual al ángulo A.

Operacion. Hágase (23, 1) en qualquiera punto C el ángulo C igual al ángulo A. Tírese (2) por el punto E la EZ paralela á FC; y el ángulo Z será igual al ángulo A: porque siendo FC, EZ paralelas, es el ángulo Z igual á C; (27, 1) y siendo C por construccion igual á A, tambien Z será igual á A.

PROPOSICION IV.

Dadas dos rectas inclinadas AB, CZ, (fig. 5.) hallar el punto O del concurso; ó tirar otras líneas, que si se alargaran, concurrieran en el mismo punto O.

Operacion. De los puntos AB tírense de qualquiera manera las paralelas AC, BZ. De los mismos puntos A, B tírense otras dos paralelas AQ, BP: tómese con el compas la línea AC, y pásese algunas veces (cómo por exemplo tercero) desde A hasta Q. Pásese otras tantas veces la BZ desde B hasta P: tírense las ES, QP, y estas concurrirán en el mismo punto O, en que concurririan las AB, CZ, si se continuaran.

Demonstracion. En el triángulo AOC, son AC, BZ paralelas: luego (2, 6) es como AC á BZ, así AO á BO; y siendo por exemplo, AC dupla de BZ, será AO dupla de BO ú de AB: luego la CZ concurre con AB á dupla distancia de AB. Tambien por ser AQ, BP equemultíplices de AC, BZ, así como AC es dupla de BZ, será AQ dupla de BP. (15, 5) Y por consiguiente probaré, como ántes, que la QP concurre con AB á dupla distancia de la AB, y asimismo la ES: luego en el mismo punto O en que concurren AB, CZ, concurren ES y QP.

Esto mismo se sacará por Aritmética del modo siguiente. Véase de quántos dedos constan la AC y BZ: réstese la menor de la mayor: pártase la mayor por este residuo, y el quociente dará las veces que cabe la distancia CZ, desde C hasta el punto O del concurso. Sea AC 24 dedos, y BZ 12: la diferencia de 24 y 12 es 12: parto 24 por 12, y salen 2 por quociente. Digo que desde C hasta O cabe dos veces la distancia CZ; como tambien desde A hasta O cabe dos veces la AB.

Por esta regla se sabe á quánta distancia concurre en un cañon de Artillería la línea del raso de los metales con la línea de la alma ó vacio del cañon, como verémos en su lugar.

PROPOSICION V.

Dado qualquiera ángulo rectilíneo BAE, (fig. 6.) y entre sus líneas el punto F, tirar por F la DC de tal suerte, que quede dividida en F en dos partes iguales.

Operacion. Tírese por el punto F la recta GF paralela á AB: córtese GD igual á AG: del punto D por F tírese la DC, y quedará dividida por medio en F.

Demonstracion. En el triángulo ADC es GF paralela á AC: luego (2, 6) es como DG á GA, así DF á FC; DG es igual á GA: luego DF es igual á FC. De la misma suerte se hará quede DC dividida en F en otra qualquiera razon de desigualdad.

PROPOSICION VI.

Dividir una recta en qualesquiera partes iguales. (fig. 7.)

Pídese, que la recta AN se divida en tres partes iguales.

Operacion. De la extremidad A tírese á discrecion la recta AZ, que forme qualquier ángulo con AN. De la ex-

extremidad N tírese NF paralela con AZ: tómense en AZ tres distancias iguales con qualquier abertura de compas: tómense otras tantas desde N en la NF, con la misma abertura; y tiradas OM, EG, quedará la recta AN dividida en I, K en tres partes iguales. Consta de la *propos.* 10 del *lib.* 6 de Euclídes.

PROPOSICION VII.

Por dos puntos poco distantes tirar una línea larga.
(*fig.* 8.)

Este problema es necesario para tirar con acierto las líneas extendidas por dos puntos, que por estar poco distantes, se expondria el Artífice á manifiesto error, si se fiase de solos ellos. Sean pues los puntos A y P por los quales se ha de tirar una línea larga.

Operacion. Desde dichos puntos con qualquier abertura, háganse las decusaciones CT; y desde C y T hágase la decusacion E; y si se quiere hágase otra H. Por A y H tírese la AH, y pasará por todos los puntos P, E, &c. tírense CT, TE, CE.

Demonstrac. (11, 1) La línea PA es perpendicular á CT en O; asimismo HO es perpendicular á la misma CT en O: luego HO y PO son una misma línea.

PROPOSICION VIII.

Entre dos puntos dados, hallar otros dos de suerte, que todos estén directamente puestos en línea recta.
(*fig.* 9.)

Sean los puntos dados A y B, entre los quales se han de señalar dos de tal suerte, que la recta que se tirare de A á B pase por todas.

Operacion. Del punto A y B como centros, háganse con qualquiera abertura los arcos que se cruzan en D y C; y de estos puntos D y C háganse otros dos arcos que se cortan en H y G. Digo que los puntos H y G están en línea recta con los dados A y B. La demonstracion viene á ser la misma que la pasada.

PROPOSICION IX.

De tres líneas proporcionales, dada la media y la suma de las extremas, determinar las extremas.
(*fig.* 10.)

Sea la línea C media proporcional entre otras dos, cuya suma es la recta AB. Pídese la magnitud de cada una de las extremas.

Operacion. Divídase la línea AB en dos partes iguales en G: desde G con la abertura GA, descríbase el semicírculo AEB: levántese la perpendicular BD igual á la media proporcional C: tírese la DE paralela á AB, que cortará al círculo en un punto E: desde E hágase EF paralela á DB. Digo que el punto F determina la magnitud de las extremas proporcionales, y que la una es AF, y la otra FB; porque (13, 6) EF es media proporcional entre AF, FB.

PROPOSICION X.

Dada la media de tres proporcionales y la diferencia de las extremas, hallar las extremas.
(*fig.* 11.)

De tres proporcionales se conoce solamente la media GH y la diferencia de las extremas entre sí, que es BA. Pídese se determine la magnitud de las extremas.

Operacion. Del punto B, extremidad de la diferencia BA, levántese la perpendicular BC igual á la media proporcional GH: divídase la diferencia BA por medio en D, y prolongando á discrecion la línea BA por ambas partes, descríbase desde el centro D con la distancia DC, el semicírculo FCE, y serán BF, BE las extremas que se piden. La razon es, porque (13, 6) es FB á BC, como BC á BE.

PRO-

PROPOSICION XI.

En tres proporcionales, dada la primera y la suma de la tercera y media, determinar la media. (fig. 12.)

Sea BP la primera proporcional á dos líneas, cuya suma es la recta AO. Pídese determinadamente la media proporcional.

Operacion. Tírese la CD indefinida: córtense en ella las líneas DE, EC iguales á AO, BP: sobre CD hágase el semicírculo CFD. Del punto E levántese la perpendicular EF: córtese la línea CE por medio en B: de este punto B, con el intervalo BF, descríbase el arco FG: córtese la AH igual á EG, y AH será media proporcional entre BP y HO.

La demonstracion consiste en probar, que son proporcionales BP á AH, como AH á HO; esto es, CE á EG, como EG á GD iguales á las sobredichas. Propondré la demonstracion por números, que es mas clara y ménos prolixa que por líneas.

Demonstracion. Sea BP ó CE 4: sea AO ó ED 24. Esto supuesto, por ser CE á EF como EF á EG, será (17, 6) el rectángulo ó producto de CE, ED, que es 96, igual al quadrado de EF: luego este quadrado de EF es 96. El quadrado de BE es 4: y porque (47, 1) los quadrados de BE, EF son iguales al quadrado de BF, sumando 96 y 4, la suma 100 será el quadrado de BF, y su raiz 10 será BF: y siendo BF, BG iguales, será BG 10. Quitando pues de BG la BE, que es 2, quedará EG 8, y por consiguiente la GD será 16. Son pues proporcionales, como CE 4 con EG 8, así EG 8 con GD 16.

PROPOSICION XII.

Entre dos líneas dadas, hallar dos medias proporcionales.

Este problema es de grande utilidad en la Geometría, por servir para la resolucion de otros innumerables, lo que

que motivó á los Geómetras intentar resolverle por varios modos; pero ninguno tiene la rigurosa demonstracion que se desea. Propondré solamente dos, que ademas de ser mas inteligibles, qualquiera de ellos es bastante para la práctica.

MODO 1 de Platon. (*fig.* 13.)

Sean dadas las dos rectas AO, OC, y se piden otras dos que sean medias proporcionales.

Operacion. Dispónganse las líneas dadas de suerte, que compongan el ángulo recto O: alárguese á discrecion la línea AO hácia E, y CO hácia T: en la línea OT fórmese el ángulo recto ATE de tal suerte, que formando asimismo el ángulo recto TEC en la línea OE, la línea EC caiga en el punto C, para lo qual no hay regla Geométrica; pero se puede hacer aplicando el ángulo recto de una esquadra sobre la línea OT, y el ángulo recto de otra esquadra sobre la línea OE, procurando ajustar perfectamente el brazo TE de la primera, con el brazo ET de la segunda; y los otros brazos caigan el uno sobre el punto A, y el otro sobre el punto C: y entónces las líneas OT, OE serán las dos medias proporcionales que se desean.

Demonstracion. La línea OT (8, 6) es media proporcional entre AO, OE; asimismo la línea OE es media proporcional entre OT, OC: luego como AO á OT, así OT á OE, y OE á OC.

MODO 2 de Filon Bizancio. (*fig.* 14.)

Sean dadas las líneas D y E, entre las quales se han de hallar dos medias proporcionales C y B.

Operacion. Dispóngase de manera, que formen un ángulo recto GFP, haciendo GF igual á E, y FP igual á D: perficiónese el rectángulo FGSP, y tiradas las diagonales, desde el punto A como centro, se describirá por sus ángulos un círculo GSPLG, que sin duda pasará por todos. (22, 3) Alárguense á discrecion los lados SG hácia H, y SP hácia R: tírese ahora una línea recta de tal suerte, que pasando por F, sean FR, LH iguales; y serán las líneas HG, RP las dos medias proporcionales entre D y E.

De-

Demonstr. Aunque no hay modo Geométrico para tirar la recta HR con las circunstancias sobredichas; pero suponiendo las tenga, se demuestra ser quatro continuas proporcionales FP, PR, HG, GF en la forma siguiente. El rectángulo SHG es igual al rectángulo FHL, (*corol.* 1 de la 36, 3) y por ser RL igual á HF, y RF á HL, será el rectángulo SHG igual al rectángulo LRF: y siendo este rectángulo LRF igual al rectángulo SRP, será el rectángulo SHG tambien igual al rectángulo SRP: luego (15, 6) estos dos rectángulos tienen los lados recíprocos, como HS á SR, así RP á HG; y siendo (2, 6) FP á PR como HS á SR, será FP á PR como PR á HG: luego son tres continuas proporcionales FP, PR, HG. Y porque son tambien proporcionales (2, 6) FP á PR como HG á GF, serán quatro continuas proporcionales FP á PR, como PR á HG y HG á GF: y tomando C igual á PR, y B igual á HG, serán las quatro D, C, B, E proporcionales.

PROPOSICION XIII.

Dividir dos líneas dadas cada una en dos partes, de tal suerte, que los quatro segmentos sean continuos proporcionales. (*fig.* 15.)

Pídese, que las líneas dadas M y N se dividan cada una en dos partes, que las quatro sean continuas proporcionales.

Operacion. Hágase el ángulo recto BOC, y sea BO igual á M, y la OC igual á N: júntese BC: descríbase el semicírculo BDO: de la seccion D tírese DE paralela á CO; y la línea DF paralela á EO: y quedará BO ó M cortada en E, y OC ó N cortada en F de tal suerte, que serán continuos proporcionales los segmentos BE, OF, EO, FC.

Demonstr. La línea ED es media proporcional entre BE y EO: (8, 6) luego será BE á ED ú OF su igual, como OF á EO. Tambien los triángulos BED, DFC tienen los ángulos E y F rectos, y por ser paralelas ED, OC, son (27, 1) los ángulos BDE y C iguales; y por consiguiente son dichos triángulos equiángulos, y sus lados proporcionales: (4, 6) luego como BE á ED ú OF, así DF ó EO á á FC : y habiendo probado arriba ser BE á OF como OF á EO, serán los segmentos proporcionales como BE á OF, así OF á EO, y EO á FC.

PROPOSICION XIV.

Dividir dos líneas dadas, cada una en dos partes, de suerte que los quatro segmentos sean recíprocamente proporcionales. (*fig.* 16.)

Las líneas M, N se han de dividir cada una en dos partes, tales, que sean recíprocamente proporcionales.

Operacion. Descríbase un círculo con qualquiera abertura de compas. Tómese con el compas la línea M; y puesto el un pie en qualquiera punto T, señálese con el otro el punto R en la circunferencia. Asimismo se tomará la línea N, y puesto el un pie del compas en qualquiera punto Q, señálese con el otro el punto G en la circunferencia; pero de manera, que tiradas las líneas TR, GQ, se corten en qualquiera punto P: y quedarán las dichas líneas cortadas mutuamente en P de tal suerte, que los quatro segmentos serán recíprocamente proporcionales; esto es, TP á GP como PQ á PR.

Demonstracion. Por cortarse las cuerdas TR, GQ dentro del círculo, es (35, 3) el rectángulo hecho de los segmentos TP, PR igual al rectángulo hecho de los otros dos GP, PQ: luego (16, 6) serán TP, PR extremas en la proporcion, y GP, PQ medias, como TP á GP, así PQ á PR, que es proporcion recíproca.

PROPOSICION XV.

Dada una línea, hallar otras dos continuas proporcionales, tales, que el quadrado de la primera sea igual á los quadrados de las otras dos juntas. (*fig.* 17.)

Sea dada la línea AB, y se buscan otras dos, que con ella sean tres continuas proporcionales, tales, que el quadrado de la primera AB sea tanto como los quadrados de las otras.

Ope-

Operacion. Divídase (30, 6) la línea AB en media y extrema razon en D. Y tómese DB por tercera proporcional: y pasándola de B hasta d, se sacará (13, 6) una media proporcional entre AB y Bd, que será BC, y serán las tres proporcionales AB, BC y Bd, tales, que el quadrado de AB es igual á los quadrados de BC y Bd juntos.

Demonstracion. El rectángulo hecho de AB y Bd ó DB es igual al quadrado de BC. (17, 6) Tambien por estar la AB dividida en media y extrema razon en D, es el rectángulo hecho de AB y AD igual al quadrado de DB: luego los dos rectángulos ABD y BAD juntos, son iguales á los quadrados de BC y DB juntos. El quadrado de AB es igual á los dos rectángulos sobredichos: (2, 2) luego el quadrado de AB es igual á los quadrados de BC y BD juntos.

PROPOSICION XVI.

Por un punto dado en la circunferencia de un círculo, tirar una tangente. (fig. 18.)

Por el punto T señalado en la periferia del círculo A se ha de tirar una tangente.

Operacion. Tírese el radio AT al punto T: y del punto T sáquese la perpendicular á la extremidad del radio, (16, 3) y será TC tangente.

PROPOSICION XVII.

Describir un círculo, cuya circunferencia pase por dos puntos dados. (fig. 19.)

Por los puntos A y B ha de pasar la circunferencia de un círculo.

Operacion. Con un mismo intervalo tomado á discrecion, hágase la interseccion C: y con el mismo intervalo, haciendo centro en C, se describirá un círculo, que pasará por los puntos A y B. Es por sí evidente.

PROP.

PROPOSICION XVIII.

Describir un círculo, cuya circunferencia pase por tres puntos dados. (*fig.* 20.)

Sean los tres puntos A, B, C, por los quales ha de pasar la circunferencia de un círculo.

Operacion. Desde los puntos A y B, con qualquiera intervalo, háganse las intersecciones E y G. Asimismo desde los puntos B y C háganse otras dos intersecciones F y H: tírense las líneas EG, FH, que se cruzarán en O: si desde O se hace un círculo con la distancia que hay desde O hasta qualquiera de los puntos dados, pasará por los tres. Tírense las cuerdas AB, BC.

Demonstracion. La línea EG es perpendicular á la cuerda AB: luego (*corol.* de la *prop.* 1 *lib.* 3) en ella está el centro; por la misma razon está el centro en la FH: luego el punto O, que solo se halla en entrambas cuerdas, es el centro del círculo que pasa por los tres puntos.

PROPOSICION XIX.

Sobre una recta dada describir un arco, que toque otra recta dada infinita. (*fig.* 19.)

Dos casos se pueden ofrecer, porque ó son paralelas las rectas dadas, ó no lo son.

Caso 1. Sea dada la recta DC infinita, y otra AB finita, que no es paralela con DC. Pídese, que sobre AB se describa un arco, que toque la línea DC.

Operacion. Alárguese la AB hasta que encuentre con la DC en un punto D. Hállese ahora (13, 6) una media proporcional entre toda la DA y el segmento DB; y esta media hallada pásese desde el punto D hasta C. Hágase un círculo que pase por los tres puntos A, B, C, y este tocará precisamente á la CD en C. El modo de hacer este círculo consta de la proposicion antecedente.

Demonstracion. La DC (*por constr.*) es media proporporcional entre la DA y el segmento DB: luego (37, 3) la DC es tangente.

Caso 2. Sea dada la recta FE paralela á la infinita DC, y se pide un círculo que toque á la DC.

Operacion. Divídase FE por medio en G con una perpendicular (11, 1) que cortará la DC en C. Descríbase un círculo que pase por los tres puntos F, E, C, y tocará á la DC en C. Y es la razon, porque siendo CA perpendicular á FE, tambien lo será á la DC paralela á FE: y siendo AC diámetro, por ser perpendicular á la mitad de la cuerda FE, (*corol.* de la 1 del 3) será DC perpendicular á la extremidad del diámetro; y por consiguiente (16, 3) tangente.

PROPOSICION XX.

Sobre una recta dada describir una línea espiral. (*fig.* 21.)

Sea dada la recta LI sobre quien se ha de describir una línea espiral.

Operacion. Pártase LI por medio en B: divídase BI en tantas partes iguales, quantas vueltas ha de dar la espira; y sean por exemplo quatro en B, C, E, G, I: divídase la parte BC por medio en A. Desde A como centro, háganse los semicírculos BC, FE, HG, LI: despues del punto B como centro, háganse los otros semicírculos CF, EH, GL, y quedará descrita la línea espiral. Otros muchos modos hay de formar líneas espirales, como son el de Arquimédes para la quadratura del círculo: y los que usan los Arquitectos en los chapiteles de las colunas jónicas, de que hablarémos en su lugar.

LI-

LIBRO II.

DE LA CONSTRUCCION DE LAS FIGURAS PLANAS.

PROP. I.

De dos rectas dadas hacer un triángulo Isósceles. (*fig.* 1.)

SEan dadas las dos rectas B, C; y de ellas se ha de formar un triángulo Isósceles.

Operacion. Tómese con el compas qualquiera de las líneas dadas, como por exemplo B; y de qualquiera punto A hágase á discrecion el arco ST: tómese con el compas la línea C, y puesto el pie del compas en qualquiera punto S del arco, hágase el corte T. Tírense las líneas AS, ST, AT, y quedará formado de las líneas dadas el triángulo AST, el qual será Isósceles, por ser los lados AS, AT iguales radios de un mismo círculo.

PROPOSICION II.

De dos rectas dadas hacer un triángulo rectángulo. (*fig.* 2.)

Este Problema comprehende dos casos.

Caso 1. Sean dadas las rectas IL, LM, y se pide se forme de ellas un triángulo rectángulo, cuyo ángulo recto sea comprehendido de dichas líneas.

Operacion. Hágase IL perpendicular á la extremidad de LM, (1 *lib.* de este tratado) y juntando la recta IM, quedará formado el triángulo ILM de dichas líneas y rectángulo en L.

Caso 2. Sean dadas las líneas SA y E: pídese se forme de ellas un triángulo rectángulo de suerte, que la mayor SA sea la basa opuesta al ángulo recto.

Ope-

Operacion. Divídase SA por medio en F; y haciendo centro en F, con la distancia FA hágase un semicírculo. Tómese con el compas la línea E, y pásese desde S hasta C. Tírense las líneas CA, CS, y quedará formado el triángulo que se pide, el qual será rectángulo en C por estar el ángulo C en el semicírculo. (31, 3)

PROPOSICION III.

Construir un triángulo Isósceles, que tenga cada ángulo sobre la basa duplo del vertical. (*fig.* 3.)

Divídase una línea AS en media y extrema razon en X; (30, 6) y haciendo centro en A, con la distancia AS hágase el arco OS á discrecion: y tomando con el compas la AX, se pasará desde S á O; y tiradas las líneas SO, AO, quedará formado el triángulo ASO, que tendrá los ángulos O y S cada uno duplo del vertical A. Tírese la XO, y hágase (16, 1 de este trat.) un círculo que pase por los tres puntos A, X, O.

Demonstracion. Por estar la línea AS dividida en X en media y extrema razon, será el rectángulo de AS, SX igual al quadrado de AX ú de SO su igual: luego el rectángulo ASX es igual al quadrado de SO: luego (37, 3) SO es tangente del círculo AXO: luego (32, 3) el ángulo SOX formado de la tangente SO con la secante OX, es igual al ángulo A formado en el segmento alterno. Añádase á entrambos el ángulo AOX, y serán los dos ángulos AOX, XOS; esto es, todo el ángulo AOS igual á los dos juntos A y AOX: y siendo el ángulo SXO, por ser externo respecto del triángulo XOA, (32, 1) igual á los dos internos opuestos A y AOX, será el ángulo OXS igual al ángulo AOS; y siendo este igual al ángulo S por la igualdad de los lados AO, AS, serán los ángulos SXO y S iguales: luego los lados OX, OS (6, 1) son iguales; y siendo por la construccion OS igual á AX, serán las rectas AX, XO iguales: luego los ángulos A y AOX opuestos á dichos lados, son iguales; y siendo como se ha dicho, el ángulo A igual al ángulo XOS, serán los tres ángulos

gu-

gulos A, AOX, XOS iguales: luego todo el ángulo O es doblado del ángulo A; y asimismo el ángulo S.

COROLARIO.

De lo dicho se sigue, que el ángulo A, y asimismo AOX es la tercera parte del ángulo AXO; porque este ángulo (32, 1) es igual al ángulo S, que es duplo de A, y al ángulo XOS igual á A: luego es triplo de A, y por consiguiente A subtriplo de AXO. Con que segun la misma construccion se forma un triángulo Isósceles OXA, que cada ángulo sobre la basa es un tercio del vertical.

PROPOSICION IV.

Dados los lados y el ángulo, hacer un paralelógramo. (fig. 4.)

El modo de describir un quadrado sobre una recta dada, consta de la *proposicion* 46 del *lib.* 1 de Eucl. Pídese pues, que de las rectas AB, AC se forme un paralelógramo rectángulo. Fórmese de ellas el ángulo CAB recto: y desde B con la distancia AC hágase un arco; y desde C con la distancia AB hágase otro que corte al primero en E: tírense las CE, EB, y quedará formado el paralelógramo rectángulo AE. El Romboyde se hará de la misma suerte, solo que el ángulo A ha de ser obliqüo é igual al ángulo dado si así se pidiere.

PROPOSICION V.

Sobre una línea dada describir qualquiera figura rectilínea semejante á otra rectilínea dada. (fig. 5.)

1 Sea dada la línea FG, y se pide, que sobre ella se describa un triángulo semejante al triángulo ACD.

Operacion. Hágase el ángulo F igual al ángulo A, (23, 1) y el ángulo G al ángulo D; y juntándose las líneas en H, será tambien el ángulo H igual al ángulo C, (32, 1) y por consiguiente serán los dichos triángulos equiángulos, y (4, 6) sus lados proporcionales: luego son semejantes.

Pí-

2 Pídese, que sobre la dada SI se forme un rectilíneo semejante al rectilíneo PMLQ. Tírese la diagonal PL, y sobre SI hágase como ántes un triángulo SOI semejante al triángulo PLQ: asimismo descríbase sobre SO el triángulo STO semejante al triángulo PML, y será el trapezio TI semejante al MQ, por constar de triángulos semejantes.

PROPOSICION VI.

Sobre una recta dada describir un pentágono regular. (*fig.* 6.)

MODO I.

Pídese, que sobre la recta AB se describa un pentágono regular.

Operacion. Hágase aparte (3) un triángulo Isósceles M, que tenga cada ángulo sobre su basa duplo del vertical; y (5) fórmese sobre la recta AB el triángulo ADB semejante á M; y (27, 1 de este) hágase un círculo que pase por sus tres puntos ADB. Divídanse los ángulos DAB, DBA por medio (9, 1) con las líneas AE, BC: tírense las líneas AC, CD, BE, ED, y quedará hecho el pentágono.

Demonstracion. El ángulo ADB es la mitad del ángulo DAB; y como por la construccion los ángulos DAE, EAB sean cada uno la mitad del mismo ángulo DAB, serán los tres ángulos ADB, DAE, EAB iguales. Asimismo probaré ser iguales á los sobredichos los ángulos DBC, CBA: luego los cinco son iguales: luego los cinco arcos DE, EB, BA, AC, CD son iguales, (26, 3) y por consiguiente son iguales sus cuerdas: (29, 3) luego el pentágono descrito es equilátero. Tambien por ser los arcos CDE, DEB iguales, los ángulos CDE, DEB son iguales, (21, 3) y así los demas: luego el pentágono descrito es tambien equiángulo: luego es regular.

MODO II.

Sobre la línea dada AB (*fig.* 7.) con la distancia AB hágase un arco á discrecion: levántese del punto A la perpenpendicular AC : divídase el quadrante CB en cinco partes iguales : tómese una de estas, y pásese de C á F : tírese la línea FA : tírese tambien la A 3 al punto 3. De la mitad O de la línea AB levántese una perpendicular que cortará á la A 3 en I ; y este será el centro del círculo que pasará por los puntos B, A, F, y será el arco AB su quinta parte : con que pasándola de B á H, de H á G, &c. quedará formado el pentágono.

Esta práctica carece del rigor Geométrico, por no haber regla demonstrable para dividir el arco CB en cinco partes iguales ; pero supuesta su division, se demonstrará de esta suerte.

Demonstracion. Por los corolarios de la *prop.* 32 del *lib.* I. de la *Geometría Elementar* ; los cinco ángulos internos del pentágono son tanto como seis rectos : luego á cada uno le tocan $\frac{6}{5}$ partes de un recto. Habiéndose pues formado el ángulo FAB de $\frac{6}{5}$ del recto CAB, será FAB al ángulo del pentágono regular : y por consiguiente tanto la AB, como AF que lo componen y se han hecho iguales, serán cuerdas de la quinta parte del círculo que pasa por B, A, F, &c. luego AFG, &c. es pentágono regular.

PROPOSICION VII.

Sobre una línea dada formar un exágono regular. (*fig.* 8.)

Sea dada la línea AH sobre quien se ha de formar un exágono regular.

Operacion. De los extremos A, H, con la distancia AH háganse los arcos AC, HC. De la seccion C hágase con el mismo intervalo el círculo AHE, &c. y la recta AH entrará seis veces justas en la circunferencia, y quedará formado el exágono.

Demonstracion. Tiradas las líneas CA, CH (1, 1 Eucl.) queda formado el triángulo ACH equilátero : luego el ángulo C es la tercera parte de dos rectos, (32, 1 Eucl.) ú de un semicírculo : luego es la sexta parte de quatro rectos ú de todo el círculo : luego el arco AH que es su medida, da, es la sexta parte del círculo, y por consiguiente su cuerda AH es el lado del exágono.

PROPOSICION VIII.

Sobre una recta dada describir qualquiera rectilíneo regular desde el exágono, hasta el de doce lados. (*fig.* 9.)

Esta proposicion y la siguiente son de grande utilidad para la práctica, aunque carecen del rigor Geométrico. Sea la línea AB sobre la qual se ha de formar un eptágono, octágono, &c.

Operacion. Divídase la recta AB por medio en O, levantando la perpendicular OI: hágase centro en B, y con la distancia BA hágase el arco CA: divídase AC en seis partes iguales 1, 2, 3, &c. Hecho esto, si se quiere hacer un eptágono, se tomará la distancia C 1, y se pasará de C hasta D, y en el círculo hecho con la distancia DA, cabrá siete veces la línea AB. Si se quiere hacer un octágono, se pasará la distancia C 2, desde C hasta E, y en el círculo hecho con la distancia EA, cabrá ocho veces la línea AB; y así de las demas, hasta la figura de 12 lados, en que la distancia CA se pasará hasta I, y en el círculo hecho con la distancia IA, cabrá doce veces la línea AB.

PROPOSICION IX.

Sobre una línea dada describir qualquiera rectilíneo desde el de 12 hasta el de 24 lados. (*fig.* 10.)

Sea dada la línea AB, sobre la qual se han de describir qualesquiera rectilíneos desde el de 12 hasta el de 24 lados.

Operacion. Hágase como ántes el arco AC, que se dividirá en 12 partes iguales: véase quántos lados sobre doce tiene la figura que se ha de describir, y tómense del arco CA otras tantas partes, y pásense á la perpendicular ID desde C hácia arriba; esto es, si se ha de describir la figura de 15 lados, porque 15 excede al 12 en 3, se tomarán tres partes del arco CA, y se pasarán de C hasta O: tómese la distancia OB, y pásese de O hasta F; y puesto el compas en F, y abierto hasta A, se hará un círculo, en quien cabrá quince veces la línea AB. De la misma suerte se describirá qualquiera otra figura, hasta la de 24 lados.

PROPOSICION X.

Sobre una recta dada describir una porcion de círculo capaz de un ángulo igual á otro ángulo dado. (*fig.* 11.)

Pídese, que sobre la línea XA se describa una porcion de círculo capaz de un ángulo igual al ángulo C dado.

Operacion. Hágase el ángulo XAT igual al ángulo dado C. Del punto A tírese AE perpendicular á AT: divídase XA por medio, con la perpendicular FH, y haciendo centro en la interseccion F, con la distancia FA hágase la porcion de círculo XEA; y todos los ángulos que se formaren dentro de esta porcion de círculo sobre la recta XA, serán iguales al ángulo dado C.

Preparacion. Tírese la FX y su perpendicular XG.

Demonstracion. El triángulo XFA tiene iguales los lados FX, FA, por ser radios de un mismo círculo: luego (5, 1 Eucl.) los ángulos FXA, FAX son iguales: luego si estos se quitan de los rectos FXG, FAT, quedarán HXG, HAT iguales; y siendo HAT, por construccion, igual al ángulo C, será HXG igual al ángulo C.

Tambien los tres ángulos del triángulo XFA son tanto como dos rectos: (32, 1 Eucl.) luego son iguales á los ángulos FXG, FAT: quítense de ambas partes los ángulos FAH, FXH, y quedará el ángulo XFA igual á los dos HXG, HAT; esto es, á dos ángulos C; y como (20, 3 Euclid.) el ángulo XEA hecho en la circunferencia, sea la mitad del ángulo XFA hecho en el centro, será el ángulo XEA igual al ángulo C; y lo mismo de qualquiera otro que sobre XA se formare en la circunferencia.

PRO-

PROPOSICION XI.

De un punto dado describir un círculo, que toque á una recta dada. (*fig.* 12.)

Sea dado el punto C, desde quien como centro se ha de describir un círculo, que toque á la recta MN.

Operacion. Tírese desde C la línea CO perpendicular á MN, y el círculo hecho con el intervalo CO tocará á la línea MN, por ser esta perpendicular á la extremidad del radio CO. (16, 3 Eucl.) Si se señalase el punto O en la línea MN, se tiraria la perpendicular OC, y con qualquiera intervalo OC se haria el círculo tangente.

PROPOSICION XII.

De un punto dado describir un círculo, que toque á otro círculo dado. (*fig.* 13.)

1 Pídese, que del punto A dado fuera del círculo HM, se describa otro círculo que le toque.

Operacion. Tírese por A y por el centro C la recta AC, y con la distancia AO se hará el círculo OGD tangente al círculo dado en O.

2 Pídese, que del punto B puesto dentro del círculo, se describa el círculo tangente.

Operacion. Tírese por el punto dado B y el centro C la recta CBO, y con el radio BO se hará el círculo SLO tangente.

3 Sea dado el punto O en la periferia del círculo, y se pide otro que le toque en O.

Operacion. Tírese la COD, y de qualquiera punto A con el radio AO se hará el círculo tangente. La razon de todo lo dicho es, porque (11, 3 Eucl.) las rectas que pasan por los centros de los círculos, pasan por el contacto.

PROP. XIII. Teorema.

Si en el semidiámetro prolongado de un círculo se toma un punto fuera del centro, el círculo descrito de dicho punto como centro, por la extremidad del diámetro será tangente y caerá todo fuera del círculo sobredicho. (*fig.* 14.)

Explicacion. Sea el círculo AHC cuyo centro es D, y en el semidiámetro AD alargado tómese qualquier punto E, y con el intervalo EA, haciendo centro en E, descríbase el círculo ABF. Digo que este círculo toca al AHC en solo el punto A.

Demonstracion. El punto E, ó está dentro del círculo AHC ó fuera. Si dentro, porque en el diámetro AF del círculo ABF se ha señalado el punto D fuera del centro E, será (7, 3 Eucl.) DA menor que DB: luego el punto B cae fuera el círculo AHC. De la misma ó semejante manera se probaria caer dicho punto B fuera del círculo AHC si el punto E estuviera fuera de dicho círculo: luego en todo caso cae fuera el punto B. Lo mismo se convencerá de otro qualquiera, ménos el punto A: luego dichos círculos se tocan solamente en A, y toda la circunferencia ABF cae fuera del círculo AHC.

PROPOSICION XIV.

Describir una figura oval, dado el mayor diámetro.

La figura oval puede ser de diferentes maneras; porque se puede formar ó con círculos que se corten ó que se toquen ó que estén separados; y en todos casos pueden ser iguales ó desiguales. Su descripcion consiste en hallar el centro de un círculo, cuya periferia por la parte cóncava toque á entrambos círculos sin cortarles.

Regla general para la descripcion por círculos iguales. (*fig.* 15, 16 *y* 17) Sea dada la recta AB para mayor diámetro de un óvalo, que se ha de hacer con círculos iguales. Tómense los puntos C y Q igualmente distantes de los extremos A y B: y desde ellos, con el intervalo CA, háganse dos círculos: desde los mismos puntos, con abertura arbitraria, hágase la decusacion E: desde E, por los centros C y Q tírense las ECI, EQH; y puesto el pie del compas en E, con la distancia EI ó EH, hágase el arco IH: hágase la misma operacion á la otra parte, y quedará formado el óvalo con círculos iguales ó apartados, como en la *fig.* 15, ó secantes como en la 16, ó tangentes como en la 17.

Regla general para la descripcion de un óvalo con círculos desiguales. (*fig.* 18, 19 *y* 20.)

Sea

Sea dada la recta AB para diámetro mayor de un óvalo, que se ha de formar con círculos desiguales. Tómese con el compas un intervalo mayor que la mitad de la línea AB, con este se cortarán los segmentos iguales AG, BH. Póngase el compas en E, centro del círculo menor, y con la distancia EG hágase el arco GI: pásese el compas á F, centro del círculo mayor, y con la distancia FH hágase el arco HI: del punto I en que se cortan los arcos, tírense por los centros de los círculos las IEQ, IFD; y desde I, con la distancia IQ ó ID, hágase el arco QD, que tocando á entrambos círculos, formará el óvalo, tanto en los tangentes, (*fig.* 18.) como en secantes, (*fig.* 19.) como en separados. (*fig.* 20.)

Demonstracion. EG, EI son por construccion iguales: luego añadiéndoles las iguales EA, EQ, serán GA, IQ iguales. Por la misma razon son iguales HB, ID: siendo pues HB, AG por construccion iguales, serán IQ, ID iguales: y estando en estas líneas los centros E, I, F, I, el arco QD hecho del centro I, será (13) tangente de entrambos círculos, y caerá todo fuera de ellos. De la misma suerte se demonstrará la formacion del óvalo en círculos iguales.

PROPOSICION XV.

Describir un óvalo, dados el mayor y menor diámetro. (*fig.* 21.)

Pídese se describa un óvalo, cuyo diámetro mayor sea AB, y el menor CR.

Operacion. Córtense arbitrariamente las proporciones iguales AS, BQ, CP: tírese la línea PQ: divídase PQ en dos partes iguales con la perpendicular MO, que cortará el diámetro CR (alargado si fuere menester) en O. Desde O tírese por el punto Q la línea OQZ, y por S la OSI: y desde O, con la distancia OC hágase el arco ICZ: y desde Q, con la distancia QZ hágase el arco ZB: y desde S, con la distancia SI hágase el arco IA; y haciendo lo mismo á la otra parte, quedará descrito el óvalo.

Demonstracion. Los triángulos OMP, OMQ tienen los la-

lados OM, MP iguales á los lados OM, MQ, y los ángulos en M rectos iguales; luego los lados OP, OQ son iguales: luego añadiéndoles los segmentos PC, QZ iguales, resultarán OC, OZ iguales: luego el arco ICZ será tangente de los arcos ZB, IA descritos de los centros Q y S: (13) luego la periferia ACB forma el semióvalo.

PROPOSICION XVI.

Describir una elipse. (fig. 22.)

Elipse es una especie de figura oval, que nace de la seccion obliqüa de una pirámide cónica, ú de un cilindro. Sus admirables propiedades se explican en el tratado de las *Secciones cónicas*. No se puede describir con el compas. Uno de los modos de su formacion es el siguiente.

Sea su mayor diámetro AH, y el menor IG, que se cortan perpendicularmente por medio en O. Del punto I, con abertura igual á OA, córtese el mayor diámetro en los puntos C y E. Tómese un hilo igual al mayor diámetro AH, y uno de sus cabos fíxese en C, y el otro en E: con que el medio del hilo podrá justamente subir hasta I, y formará el triángulo CIE. Póngase en un lápiz, y váyase llevando hasta A y hasta H, cuidando esté siempre tirante, y extendido el hilo: hágase lo mismo á la otra parte, y quedará formada la elipse, cuyo centro es O, y los dos puntos C y E se llaman *focus*.

PROPOSICION XVII.

Hallar el centro y los dós diámetros de una elipse. (fig. 23.)

Sea dada la elipse ABCD. Pídese el centro y los diámetros.

Operacion. Tírense á discrecion las dos líneas paralelas NX, IH: divídanse entrambas por medio en L y M: tírese por esas divisiones la recta VLMT, que se partirá por medio en E; y este punto E será el centro de la elipse.

Hallado el centro E, se hallarán los dos diámetros del mo-

modo siguiente: Del centro E descríbase qualquier arco de círculo, que corte la elipse en qualesquiera puntos F y G: tírese la FG, que se partirá por medio en R: por R y el centro E tírese la recta BED, y esta será el mayor diámetro de la elipse: tírese por E la perpendicular AEC, y será el diámetro menor. La demonstracion es fácil; pero porque requiere tener noticia de algunos términos, que se explicarán en el tratado de las *Secciones cónicas*, la omito en este lugar.

LIBRO III.

DE LA INSCRIPCION Y CIRCUNSCRIPCION DE LAS FIGURAS.

EN este libro se contienen las proposiciones del *lib.* 4 de Euclídes y otras de mucha utilidad. Las de Euclídes se comprehenden en las quince primeras, que guardan casi su mismo órden, y son el fundamento de la fábrica del Cánon Trigonométrico, como verémos en su lugar.

DEFINICIONES.

1 *Figura inscrita se dice, la que estando dentro de otra, toca á la de afuera con todos sus ángulos; y si la inscrita es círculo, tocará con la circunferencia todos sus lados.*

2 *Figura circunscrita se dice, la que está por afuera de su inscrita, y sus lados tocan todos los ángulos de la inscrita; y si es círculo, su circunferencia pasa por todos sus ángulos.*

3 *Una línea recta se dice estar acomodada ó inscrita en un círculo, quando sus extremos tocan á la circunferencia.*

PRO-

PROPOSICION I.

Inscribir en un círculo una recta igual á otra recta dada, miéntras sea menor que su diámetro. (*fig.* 1.)

Pídese, que la recta AC se inscriba ó acomode dentro el círculo GIHF. Tómese con el compas la longitud de AC, y puesto el un pie en E se cortará con el otro la circunferencia en F, y la línea EF será igual á la dada AC, como es manifiesto.

PROPOSICION II.

Inscribir en un círculo un triángulo equiángulo á otro triángulo dado. (*fig.* 1.)

En el círculo mismo GIHF se ha de inscribir un triángulo equiángulo al dado ABC.

Operacion. Tírese qualquiera tangente LIM, (15, 1 de este trat.) y en el contacto I hágase el ángulo MIH igual al ángulo A, y el ángulo LIG igual al ángulo C, (23, 1 Eucl.) y tirando la GH quedará formado el triángulo GIH equiángulo al triángulo dado ABC.

Demonstracion. El ángulo MIH es igual al ángulo G hecho en su segmento alterno: (32, 3 Eucl.) tambien el ángulo LIG es por la misma razon igual al ángulo H Siendo pues (*por constr.*) el ángulo MIH igual al ángulo A, y el LIG al ángulo C, será el ángulo G igual á A, y el ángulo H á C: con que el triángulo GIH es equiángulo al ABC.

PROPOSICION III.

Circunscribir á un círculo dado un triángulo que sea semejante á otro triángulo dado. (*fig.* 2.)

Pídese, que al círculo AEDB se circunscriba un triángulo semejante al triángulo dado GPH.

Operacion. Tírese el diámetro AB. Fórmese en el centro C el ángulo ACE igual al ángulo H: y el ángulo BCD igual al ángulo G: alárguense las líneas EC y DC á discreerecion hácia S y R. Tírese la tangente NO paralela á RD, y la tangente OI paralela á ES, y la tangente NI paralela al diámetro AB, y será el triángulo INO circunscrito y semejante á GPH.

Demonstracion. Por ser ES paralela á OI, es (29, 1) el ángulo I igual al ángulo ESN: y por ser NS paralela á FC, es el ángulo dicho ESN igual al ángulo ECF: luego el ángulo I es igual al ángulo ECF; y siendo este (*por construccion*) igual al ángulo H, será el ángulo I igual al ángulo H. Tambien por ser RD paralela á NO, es el ángulo N igual al ángulo DRI; este es igual al ángulo DCT, por ser RI, CT paralelas: luego el ángulo N es igual al ángulo DCT: y como este sea (*por construc.*) igual al ángulo G, será el ángulo N igual al ángulo G; y por consiguiente (32, 1 Eucl.) el ángulo O igual á P: luego el triángulo circunscrito NOI es equiángulo al dado GPH.

PROPOSICION IV.

Inscribir un círculo en un triángulo. (*fig.* 3.)

En el triángulo ACH se ha de inscribir un círculo.

Operacion. Divídanse dos de sus ángulos, como C y H por medio, con las líneas CO, HO: y del punto O de su concurso tírense OF, OE, OG perpendiculares á los lados; y el círculo hecho del centro O, con la distancia OF ú de qualquiera otra de dichas perpendiculares, tocará los lados del triángulo propuesto, y será inscrito. (*def.* 1)

Demonstracion. Los triángulos OGH, OFH tienen los ángulos G y F rectos iguales: y los ángulos en H iguales, (*por construc.*) y el lado OH comun: luego (26, 1) dichos triángulos son totalmente iguales: luego OG, OF son iguales. Asimismo probaré ser OE, OF iguales: luego las tres rectas OE, OF, OG son iguales: luego el círculo descrito del centro O por F, pasa por E y G; y siendo los ángulos E, F, G rectos, serán los lados del triángulo tangentes; (16, 3 Eucl.) luego el círculo es inscrito.

PRO-

PROPOSICION V.

Circunscribir un círculo á un triángulo.

Descríbase por la *prop.* 17 del *lib.* 1 de este tratado un círculo que pase por los tres puntos, en que se forman los ángulos del triángulo, y quedará el círculo circunscrito. Consta de dicha proposicion.

PROPOSICION VI.

Inscribir en un círculo (fig. 4.) un quadrado, un octágono y las demas figuras regulares de doblado número de lados.

Operacion. Tírense dos diámetros, que se corten perpendicularmente en el centro E del círculo. Tírense las líneas AC, AD, BD, BC, y quedará inscrito el quadrado.

Demonstracion. Por ser los quatro ángulos formados en el centro E rectos, serán los arcos y cuerdas AC, AD, &c. iguales: y porque cada uno de los quatro ángulos A, D, B, C está en el semicírculo, son todos rectos: (31, 3) luego ACBD es quadrado.

De aquí se infiere, que dividiendo los arcos AC, CB, &c. por medio, y tirando sus cuerdas, quedará inscrito el octágono; y continuando la subdivision, se inscribirán las demas figuras de doblado número de lados.

PROPOSICION VII.

Circunscribir un quadrado á un círculo. (fig. 5.)

Operacion. Por el centro E del círculo tírense dos diámetros en ángulos rectos AB, CD: por sus extremidades tírense perpendiculares, y quedará formado el quadrado IG circunscrito.

Demonstracion. En el quadrilátero AD los ángulos E y D son rectos por construccion: luego las líneas AE, GD son paralelas. (28, 1) Por la misma razon son paralelas ED, AG: luego las opuestas EA, DG, ED, AG son

(33, 1)

(33, 1) iguales: y siendo EA, ED iguales (por la definicion del círculo) serán todas iguales; y (34, 1) los ángulos E y G opuestos, tambien serán iguales: siendo pues E recto, tambien lo será el ángulo G. De la misma suerte probaré ser H, I, F rectos, y que las rectas BH, AG son iguales á ED, y por consiguiente entre sí; y que IB, CE son iguales, y por consiguiente IB con BH, y así de las demas: luego los quatro lados FG, GH, IH, IF tienen sus mitades mútuamente iguales; luego los quatro lados sobredichos son iguales, y FH es quadrado y circunscrito al círculo, por ser sus lados las tangentes.

PROPOSICION VIII.

Inscribir un círculo en un quadrado. (*fig.* 6.)

Operacion. Divídanse los lados del quadrado por medio en E, F, G, H, y tiradas las líneas EG, HE, de la interseccion I con la distancia IE hágase un círculo y quedará inscrito.

Demonstracion. Las líneas EG, BD juntan las EB, GD, que son paralelas y por construccion iguales: luego (33, 1 Eucl.) EG, BD son paralelas é iguales, y (34, 1 Eucl.) los ángulos E y D son iguales; y siendo D recto, tambien lo será el ángulo E. Asimismo probaré ser rectos los ángulos formados en G, H, F. Siendo pues EI, BF paralelas, como tambien EB, IF, será EF paralelógramo; y siendo por suposicion sus lados EB, BF iguales, tambien lo serán IE, IF. (34, 1 Eucl.) De la misma suerte probaré ser iguales IF, IG, IH: luego el círculo descrito del centro I por E, pasará por F, G, H: y siendo los ángulos formados en E, F, G, H rectos, los lados serán tangentes.

PROPOSICION IX.

Circunscribir un círculo á un quadrado. (*fig.* 4.)

Operacion. Tírense las diagonales AB, CD, que se cortarán en E; y haciendo centro en E, con la distantancia EA se hará un círculo, que será circunscrito al quadrado.

Demonstracion. El triángulo CAD tiene el ángulo A recto: luego los dos ACD, ADC hacen un recto; (32, 1 Eucl.) y como dichos ángulos (5, 1 Eucl.) sean iguales, será el ángulo ACE medio recto. De la misma suerte se probará ser medio recto el ángulo CAE: luego los ángulos ACE, CAE son iguales: luego (6, 1 Eucl.) las EC, EA son iguales; lo mismo se convence de las demas: luego el círculo descrito del punto E, con la distancia EA pasa por los quatro puntos A, D, B, C.

PROPOSICION X.

Inscribir en un círculo un pentágono regular, y las demas figuras de doblado número de lados.
(*fig.* 6 *lib.* 2)

Modo 1. Dado el círculo ACD, &c. se pide que se inscriba en él un pentágono regular.

Operacion. Hágase aparte un triángulo M Isósceles, que cada ángulo sobre su basa sea duplo del vertical, (3 *lib.* 2 de este tratado) y dentro del círculo dado inscríbanse (2) el triángulo ADB semejante á M; y la AB será el lado del pentágono inscrito, que tomándola con el compas, dará los puntos E, D, C: y tiradas las líneas BE, ED, &c. quedará inscrito el pentágono. Consta de la *prop.* 6 del *lib.* 2 de este tratado.

Modo 2 mas breve y fácil, es de Ptolomeo en el *lib.* 1 de su *Almagesto.* (*fig.* 7.) Tírese el diámetro GH, y el semidiámetro MI perpendicular á GH: divídase el radio MH por medio en L. Desde L como centro, con la distancia LI hágase el arco IF: tírese la recta IF, y esta será el lado del pentágono inscrito, de suerte, que cabrá cinco veces justas en la periferia del círculo; y MF será el lado del polígono de diez lados, que cabrá diez veces en la misma periferia. La demonstracion se puede ver en el P. Clavio en el *Escolio* á la *prop.* 10 del *lib.* 13 de Eucl. Dividiendo por medio los arcos que sirven para el pentágo-

no,

no, se inscribirá tambien la figura de diez lados; y con otra subdivision la de veinte; y así de las demas.

PROPOSICION XI.

Circunscribir un pentágono ó qualquiera figura regular á un círculo. (fig. 8.)

La regla que da Euclídes para circunscribir el pentágono regular al círculo, es general para todos los polígonos regulares: y así lo que se obrare en el pentágono, se hará tambien en los demas.

Operacion. Inscríbase en el círculo (11) el pentágono MNP, &c. Tírense á sus ángulos los radios OM, ON, OP, &c. Por sus extremidades M, N, P, &c. tírense las tangentes SZ, TS, TV, VX, XZ, y quedará circunscrito el pentágono.

Preparacion. Del centro O tírense las líneas OS, OT.

Demonstr. Por salir las tangentes SM, SN de un mismo punto S, es el quadrado de qualquiera de ellas igual al rectángulo QSI: (36, 3 Eucl.) luego los quadrados de SM, SN son iguales, y por consiguiente son iguales dichas líneas. Tambien son iguales los radios OM, ON: luego los triángulos SOM, SON tienen los lados SMO, SNO iguales y SO comun: luego (8, 1 Eucl.) dichos triángulos son totalmente iguales: luego los ángulos SOM, SON son iguales, y cada uno es la mitad del ángulo NOM. Asimismo demonstraré, que el ángulo NOT es la mitad del ángulo NOP, igual á MON, por ser los ángulos del centro propios del pentágono regular inscrito: luego los ángulos SON, NOT son iguales: con que los triángulos SNO, TNO tienen los ángulos en O iguales, los ángulos en N rectos y la NO comun: luego (26, 1 Eucl.) son totalmente iguales, y las líneas SN, NT son iguales. De la misma suerte probaré ser iguales las líneas SM, MZ: luego TS, SZ son iguales, y asimismo los demas lados del pentágono: luego es equilátero. Y habiendo probado, que los ángulos NSO, NTO son iguales y mitades de los ángulos totales T y S, se sigue ser estos, como todos los demas ángulos, iguales: luego el pentágono es equiángulo: luego es regular.

PRO-

PROPOSICION XII.

Inscribir un círculo en el pentágono regular. (*fig.* 9.)

Sea propuesto el pentágono MST, &c. en quien se ha de inscribir un círculo.

Operacion. Divídanse los ángulos M y S por mitad con las líneas MO, SO que concurrirán en O. Divídanse tambien por mitad los lados MS, ST en H, I; y tiradas del punto O las OH, OI, hágase un círculo con la distancia OH, y este tocará los lados del pentágono, y por consiguiente será inscrito.

Demonstr. En el triángulo MOS los ángulos M y S son iguales, por ser mitades de ángulos iguales: luego (6, 1 Eucl.) los lados OS, OM son iguales: luego los triángulos MHO, SHO tienen los lados OM, MH iguales á los lados OS, SH, y los ángulos en M y S iguales: luego (4, 1 Eucl.) son totalmente iguales. Y por la misma razon serán iguales ISO, SOH, como tambien ISO, IOT: luego los lados OH, OI son iguales: luego el círculo descrito del centro O por H, pasará por I y por las demas mitades de los lados del pentágono: luego tocará dichos lados. De la misma manera se inscribirá el círculo en otra qualquiera figura regular.

PROPOSICION XIII.

Circunscribir un círculo á un pentágono ó á qualquiera otra figura regular. (*fig.* 10.)

Operacion. Divídanse qualesquiera dos lados del pentágono ú de otra qualquiera figura regular por medio en O, I: y de dichas divisiones se levantarán las perpendiculares OR, IR, que concurrirán en un punto como R. Digo que el círculo hecho del centro R, con la distancia RQ será circunscrito. Tírense RQ, RP, RS.

Demonstracion. Los triángulos PRO, ORQ, QRI, IRS se demuestran iguales, como en la proposicion antecedente: luego RP, RQ, RS son iguales: luego R es centro del círculo que pasa por PQS.

PRO-

PROPOSICION XIV.

Inscribir un exágono regular en el círculo. (*fig.* 11.)

Operacion. Tírese el diámetro NR, y haciendo centro en R, con la distancia RO hágase el arco SOQ. Tírense las rectas QOM, SOP: júntense las cuerdas MN, NP, &c. y quedará inscrito el exágono regular. Consta de la *prop.* 7. del *lib.* 2 de este tratado.

COROLARIOS.

1 *De aquí se colige ser el lado del exágono igual al radio; porque RO, RQ son radios de un mismo círculo SOQ, y RO es radio del círculo en quien está inscrito el exágono.*

2 *Si se tiran las líneas SN, NQ, SQ, quedará inscrito el triángulo SNQ equilátero; porque el ángulo SOQ incluye dos sextas; esto es, un tercio del círculo; y asimismo los ángulos NOS, NOQ: luego las cuerdas SN, NQ, SQ son iguales.*

PROPOSICION XV.

Inscribir en un círculo las figuras de 15, 30, 60 *lados*, &c. (*fig.* 12.)

Operacion. Inscríbase en el círculo un triángulo equilátero ACB, (*corol.* 2 precedente) y un pentágono regular ADF, &c. (13) Digo que CF es la décimaquinta parte de la periferia; y su cuerda el lado del polígono de 15 lados.

Demonstracion. Por ser la recta AC lado del triángulo equilátero, es el arco AC la tercera parte del círculo: luego habiéndose de dividir el círculo en 15 partes, le tocarán 5 al arco AC, que son el tercio de 15. Tambien por ser AD lado del pentágono, será el arco AD la quinta parte del círculo: luego de las 15 partes le tocan 3, que son el quinto de 15, y al arco DF le tocan otras 3: luego á todo el arco ADF le tocan 6; y como al arco AC, por la razon sobredicha, le toquen 5, se sigue ser CF una de las 15 partes del círculo, y la cuerda CF el lado de la figura de 15 lados.

Hallado este, por continua subdivision se inscribirán las fi-

figuras de 30, 60 lados, &c. *Aquí terminan las proposiciones del* libro 4 *de Euclídes.*

PROPOSICION XVI.

Inscribir un eptágono regular en un círculo.

Hasta ahora no se ha hallado método demonstrable para inscribir en el círculo otros polígonos regulares, que los explicados en las proposiciones pasadas, y los que se pueden continuar por biseccion de sus arcos. Si se hallase arte para formar un triángulo Isóceles, que qualquier ángulo sobre su basa fuera triplo, quádruplo, &c. del vertical, se inscribirian en el círculo las figuras de 7, 9, 11, 13 lados, &c. porque así como el triángulo Isóceles del ángulo duplo (11) sirve para la inscripcion del pentágono; el Isóceles del ángulo triplo sirviera para el *eptágono*; el de quádruplo para el *nonágono*, &c. pero por no haber modo Geométrico para formar dicho triángulo, me contentaré con explicar el siguiente, bastante para la práctica.

Tírese el diámetro AI; (*fig.* 13.) y con la distancia igual al semidiámetro AL hágase el arco CLC. Tírese la recta CC, y su mitad CO será el lado del *eptágono* que cabrá siete veces en la circunferencia del círculo dado.

PROPOSICION XVII.

Inscribir un nonágono regular en un círculo. (*fig.* 14.)

En el círculo dado tírese el semidiámetro AI. Hágase centro en I, y con la distancia IA hágase el arco OAC. Tírese la recta OC prolongada hácia F, y con la misma distancia AI, desde E como centro, hágase el arco FG; y del punto F con el mismo intervalo, el arco EG. Tírese la recta AG, y el arco OH será sin diferencia notable la nona parte de la periferia, y la recta OH el lado del *nonágono*.

TRA-

PROPOSICION XVIII.

Inscribir el polígono de once lados en un círculo. (*fig.* 15.)

Operacion. Tírese el semidiámetro AT: divídase por medio en C: de los puntos A y C, con el intervalo AC, háganse los arcos CSI, AS: del punto I, con el intervalo IS, hágase el arco SO, y el intervalo CO será sin diferencia notable el lado de la figura de once lados.

PROPOSICION XIX.

Inscribir en el círculo qualquiera figura regular.

Operacion. Divídase un quadrante del círculo dado, en tantas partes iguales, quantos tiene lados la figura que se ha de inscribir. Tómense siempre quatro de las dichas partes, y esta distancia cabrá tantas veces justamente en el círculo, quantos lados tiene la figura.

Exemplo. Quiero inscribir el pentágono: divido un quadrante del círculo en cinco partes iguales: tomo con el compas las quatro, y esta distancia será el lado del pentágono. La razon es, porque las cinco partes en que está dividido el quadrante, caben quatro veces en todo el círculo: luego quatro de ellas caben cinco veces; y así de los demas polígonos regulares.

PROPOSICION XX.

Inscribir un quadrado en un triángulo dado. (*fig.* 16.)

Esta y las siguientes proposiciones solo sirven á la curiosidad; omito sus demonstraciones por ser prolixas, y no depender de ellas Teorema alguno: podrá verlas el curioso en Samuel Marolois, que satisfará su deseo.

Sea dado el triángulo ABC, y se pide se inscriba en él un quadrado.

Operacion. Del punto A levántese á esquadra la AD igual á AB: del ángulo C caiga el perpendículo CE: tírese la DE, y de la seccion F tírese FG paralela á la basa AB: tírense FH, GI perpendiculares á la misma basa, y será HG el quadrado inscrito.

PROPOSICION XXI.

Inscribir un triángulo equilátero en un quadrado. (*fig.* 17.)

Operacion. Tírense las diagonales AC, BD; y del punto E, con el intervalo EA, hágase el círculo circunscrito al quadrado dado; y desde C, con el mismo intervalo háganse los cortes G y F: tírense las líneas AG, AF; y por las intersecciones H, I, con los lados del quadrado, tírese la HI, y quedará inscrito el triángulo equilátero AHI.

PROPOSICION XXII.

Inscribir un triángulo equilátero en un pentágono. (*fig.* 18.)

Pídese, que dentro del pentágono ABC, &c. se inscriba un triángulo equilátero.

Operacion. Circunscríbase al pentágono dado un círculo, (14) y tirado el diámetro AG, con el mismo intervalo del radio FG, háganse desde G los cortes K, L: tírense las AL, AK, que cortan al pentágono en IH: tírese la HI, y será el triangulo inscrito AHI equilátero.

PROPOSICION XXIII.

Inscribir un quadrado en un pentágono. (*fig.* 19.)

Sea dado el pentágono ABC, &c. en quien se ha de inscribir un quadrado.

Operacion. Tírese AQ perpendicular á la basa CD: hágase ET paralela á AQ é igual á EB: tírese la recta AT, que cortará al lado del pentágono en O: tírese OP paralela á DC, y OM paralela á AQ, y PN tambien paralela á AQ; y cerrando con la NM, quedará el quadrado PM inscrito en el pentágono.

PROPOSICION XXIV.

Circunscribir un quadrado á un triángulo equilátero. (*fig.* 20.)

Sea el triángulo equilátero ACB, á quien se ha de circunscribir un quadrado.

Ope-

Operacion. Córtese la basa CB por medio en E: alárguese la misma basa á entrambas partes de suerte, que ED, ED sean iguales á EA. Del punto E, con la distancia EC, hágase el semicírculo CFB: tírese la línea AEF y las líneas AD, AD; y del punto F tírense las líneas FCH, FBG, y quedará circunscrito el quadrado AGFH.

PROPOSICION XXV.

Circunscribir á un quadrado un triángulo semejante á otro triángulo dado. (*fig.* 21.)

Pídese, que al quadrado FGDE se circunscriba un triángulo semejante al triángulo ABC.

Operacion. Hágase el ángulo EFM igual al ángulo A, y el ángulo FEM igual al ángulo B: alárguese la línea GD por entrambas partes, y asimismo las ME, MF hasta que encuentren con la IH en I y en H; y será el triángulo circunscrito MIH semejante al triángulo ACB.

Demonstracion. El triángulo MIH es (2, 6 Euclíd.) semejante al MFE; y habiéndose este hecho semejante al triángulo ACB, será IMH semejante á ACB.

PROPOSICION XXVI.

Circunscribir una figura oval á un paralelógramo rectángulo. (*fig.* 22.)

Pídese, que al paralelógramo rectángulo AF se circunscriba una figura oval.

Operacion. Divídanse por medio los quatro lados en H, I, G, K, y tírense las líneas GK, HI. Tírense las rectas AI, CI, que cortarán á GK en L y O. Desde I, con la distancia IA hágase el arco AC; y desde L, con la distancia LA hágase el arco AE, y así sus correspondientes, y quedará circunscrito el óvalo. Tambien se puede tirar la línea AR á qualquiera punto R de la HR, y con la distancia RA hacer el arco AC; y con la QA el arco AE. Consta esta práctica de la *propos.* 13 del libro antecedente.

LIBRO IV.

DE LA DIVISION DE LAS FIGURAS.

PROPOSICION I.

Dividir el círculo en 360 grados. (fig. 1.)

PAra dividir el círculo en 360 grados, se tirará el diámetro AE, á quien se hará perpendicular el otro diámetro CF, y quedará dividido el círculo en quatro quadrantes AC, CE, FE, FA. Con el intervalo igual al radio háganse desde A los cortes H y G, que como diferentes veces se ha dicho, serán cada uno de 60 grados. Desde C, con la misma abertura, háganse los cortes M y N; y desde E los cortes I, K; y desde F los cortes S, L; y quedará dividido el círculo en 12 partes iguales: porque siendo el quadrante CA 90 grados, y siendo AH 60, y CM tambien 60, serán tanto AM como CH y MH de 30 grados: luego el quadrante CA queda dividido en 3 partes iguales, y asimismo los otros: luego todo el círculo en 12. Divídase ahora cada una de estas partes en 3 iguales, y quedará cada quadrante dividido en 9 partes iguales, y todo el círculo en 36. Divídase cada una de estas en 10, y quedará cada quadrante dividido en 90 grados, y el círculo en 360.

PROPOSICION II.

Dividir un triángulo en qualesquiera partes, con líneas tiradas de uno de sus ángulos. (fig. 2.)

El triángulo ABC se ha de dividir en dos partes, la una doblada de la otra, con una línea tirada del ángulo A.

Ope-

Operacion. Divídase el lado BC opuesto al ángulo A, en dos partes, tales, que BE sea doblada de EC: (10, 6 Eucl.) tírese la AE, y quedará dividido el triángulo en dos partes, de las quales BAE será dupla de EAC.

Demonstracion. Los triángulos BAE, EAC por tener una misma altura, son como sus basas: (1, 6 Eucl.) luego siendo BE dupla de EC, será el triángulo BAE duplo de EAC. Si se pidiere, que dicho triángulo se divida en dos partes iguales, se dividirá la basa por medio, y se obraria como ántes; y así en las demas proposiciones.

PROPOSICION III.

Dividir un triángulo en qualesquiera dos partes, con una paralela á uno de sus lados. (fig. 3.)

Pídese, que el triángulo AEF se divida en dos partes iguales, con una línea paralela á la basa AF.

Operacion. Divídase el lado AE por medio en G: añádase en derechura EH igual á EG: sáquese (13, 6 Eucl.) la media proporcional EI entre AE, EH: córtese EB igual á EI, y la paralela BL dividirá el triángulo en dos partes iguales.

Demonstracion. Los triángulos AEF, BEL son semejantes: (*corol.* 1, 4, *lib.* 6) luego (196) tienen entre sí razon duplicada de la de sus lados homólogos AE, BE; y siendo BE igual á EI, tendrán dichos triángulos razon duplicada de la de AE á EI. La razon de AE á EH es duplicada de la de AE á EI: luego el triangulo AEF al triángulo BEL tiene la misma razon que AE á EH; siendo pues AE doblada de EH, será el triángulo AEF doblado de BEL: luego este es mitad del otro; y el trapezio AL la otra mitad.

Este Problema se puede tambien proponer en esta forma: *Pídese un triángulo semejante al propuesto AEF, que sea su mitad.*

Si se pidiere, que la paralela BL dividiese el triángulo AEF en dos partes desiguales, como por exemplo, que la AL fuese doblada de la otra, se dividirá la AE en dos partes, la una doblada de la otra; y la menor se pondria en

EH:

EH : y si se pidiese, que BEL fuese la mayor, se pondria el mayor segmento de la AE, desde E á H, y se obraria como ántes.

PROPOSICION IV.

Dividir un triángulo con líneas paralelas á un lado en diferentes partes, que tengan entre sí una razon dada. (*fig.* 4.)

Pídese, que el triángulo ABC se divida en quatro partes iguales con líneas paralelas á la basa BC.

Operacion. Divídase AB en quatro partes iguales en los puntos D, E, F. Hállese entre AB, AD la media proporcional AI; entre AB, AE la media AO; y entre AB, AF la media AP. Tírense por los puntos P, O, I las líneas PL, ON, IM paralelas á BC, y quedará dividido el triángulo como se deseaba. Cada division es la misma que la de la proposicion antecedente, como tambien la demonstracion.

PROPOSICION V.

Dividir un triángulo en dos partes iguales por un punto dado en uno de sus lados. (*fig.* 5.)

Sea dado el punto F en el lado CE del triángulo CAE. Pídese, se divida dicho triángulo en dos partes iguales, con una línea que salga del punto F.

Operacion. Divídase el lado CE por medio en G, y tírense las líneas AG, AF; y del punto G hágase GH paralela á FA; y tirando la línea FH quedará partido el triángulo en dos partes iguales.

Demonstracion. El triángulo GAC es la mitad del triángulo CAE; (1, 6 Eucl.) el trapezio CAHF es igual al triángulo GAC: luego es la mitad del triángulo CAE. Que el trapezio CAHF sea igual al triángulo GAC, se prueba, porque los triángulos GAH, GFH tienen una misma basa GH, y están entre las paralelas GH, FA: luego (37, 1 Eucl.) son iguales. Quítese á entrambos GOH, que es comun, y quedarán los triángulos FOG, AOH iguales: añádase á entrambos el trapezio AOFC, y resultarán el trapezio

CAHF

CAHF y el triángulo GAC iguales: luego dicho trapezio es la mitad del triángulo, y FHE la otra mitad. Asimismo se dividirá en dos partes que tengan otra qualquier proporcion, dividiendo la CE en dos partes que tengan la proporcion dada, y obrando como ántes.

PROPOSICION VI.

Dividir un triángulo en qualesquiera partes por un punto dado en uno de sus lados. (*fig.* 6.)

Pídese, que el triángulo MAN se divida en tres partes iguales por el punto I.

Operacion. Divídase la basa MN en tres partes iguales en los puntos O, P. Tírense las rectas AO, AI, AP: háganse PH, OG paralelas á AI: tírense últimamente las rectas IG, IH, y con estas quedará dividido el triángulo en tres partes iguales.

Demonstracion. Los triángulos PAH, PIH, por tener una misma basa PH, y estar entre las paralelas PH, IA, son iguales: (37, 1 Eucl.) luego si se añade á entrambos el triángulo PHN, resultarán PAN, IHN iguales. El triángulo PAN es el tercio del triángulo total MAN: luego IHN es el tercio de dicho triángulo. De la misma suerte se convence, que el triángulo MGI es el tercio de MAN: luego queda dividido en tres partes iguales.

De la misma suerte se dividirá en partes que tengan qualquiera razon de desigualdad, dividiendo segun la razon dada, la basa MN, y haciendo la misma operacion.

PROPOSICION VII.

Dividir un triángulo en partes iguales por diferentes puntos señalados en uno de sus lados. (*fig.* 7.)

Pídese, que el triángulo KAC se divida en tres partes iguales por los puntos E, H.

Operacion. Divídase por el punto E en dos partes, que la una sea doblada de la otra, (5) y será por exemplo

el

el triángulo EGC doblado del trapezio KAGE ; y por consiguiente será este la tercera parte del total KAC. Divídase ahora el triángulo EGC en dos partes iguales por el punto H, (5) y quedará el triángulo total dividido por E y H en tres partes iguales. Consta de las antecedentes.

PROPOSICION VIII.

Cortar de un campo triangular las cahizadas de tierra que se pidieren. (*fig.* 8.)

1 Pídese, que del campo triangular LMN se corten con una línea tirada del ángulo M cien varas quadradas.

Operacion. Tírese la perpendicular MP, y véase quántas varas tiene de largo; supongamos sean 25: pártase 100 por 25, y será el quociente 4: duplíquese el 4, y será 8: cuéntense en LO 8 varas, y tírese la recta OM, y será el triángulo LMO de 100 varas quadradas.

Demonstracion. El triángulo LMO es (41, 1 Eucl.) la mitad del paralelógramo hecho de la basa LO, y de la perpendicular MP; y siendo MP 25 y LO 8, será dicho paralelógramo 200: luego el triángulo LMO será 100.

2 Pídese, que del triángulo QRS se corten 100 varas quadradas con una línea tirada del punto I dado en el lado RS.

Operacion. Tírese del punto I la perpendicular IT al lado RQ: véase quántas varas tiene en longitud; sean por exemplo 10: pártanse 100 por 10, y será el quociente 10: duplíquese, y serán 20: cuéntense 20 varas desde R hasta V, y tirando la recta VI, será el triángulo VRI de 100 varas quadradas por la razon sobredicha.

Si habiendo duplicado el quociente fuere tan crecido el número, que no cupiese en la línea RQ, se tirará la línea IQ al ángulo Q, y se buscará quántos pies quadrados caben en la área del triángulo RIQ, que serán ménos de los que se buscan; y del modo sobredicho se cortará del triángulo QIS lo que restare para cumplimiento del número que se pide.

PRO-

PROPOSICION IX.

Dividir un paralelógramo en qualesquiera partes con líneas paralelas á uno de sus lados. (*fig.* 9.)

El paralelógramo MN se ha de dividir en dos partes, la una doblada de la otra, con una linea paralela al lado NP.

Operacion. Divídase el lado MP en R de suerte, que MR sea doblada de RP. Tírese RV paralela á NP, y quedará dividido en dos partes MV, RN, aquella doblada de esta.

Demonstr. Los paralelógramos MV, RN por tener una misma altura se han como sus basas MR, RP, (1, 6 Eucl.) y siendo (*por constr.*) MR doblada de RP, tambien MV será doblada de RN.

PROPOSICION X.

Cortar de un campo paralelógramo las cahizadas que se quisieren. (*fig.* 9.)

Del campo MN se han de cortar 600 varas quadradas.

Operacion. Mídase el lado NP si fuere perpendicular á MP, y si no lo fuere, tírese la perpendicular VT, y mídase; tenga por exemplo 20 varas: pártanse 600 por 20, y será el quociente 30 varas: córtese MR de 30 varas, y tirando la RV paralela á PN, será el paralelógramo MV de 600 varas. La razon es, porque la área nace de la multiplicacion de la altura VT por la basa MR: (*def.* 1 *lib.* 2 Eucl.) luego si la área 600 se parte por la altura VT, se hallará la basa MR: y por consiguiente queda determinado el paralelógramo.

PROPOSICION XI.

Dividir un paralelógramo en dos partes iguales por un punto determinado. (*fig.* 10.)

Si el punto dado fuere uno de sus ángulos, con tirar de dicho punto la diagonal, queda dividido por medio. (34, 1 Eucl.) Pero si el punto dado fuere K, en uno de sus lados se tirarán las diagonales YZ, MN que se cruzan en O; tírese por O la recta KOL, y quedará el paralelógramo dividido en dos partes iguales.

De-

Demonstr. Los triángulos YOL, KOZ tienen los ángulos en O iguales, (15, 1 Eucl) y los ángulos LYO, KZO tambien iguales, por ser alternos en las paralelas: y los lados YO, OZ iguales, como se colige de la 34 del 1 de Eucl. luego dichos triángulos, (26, 1 Eucl.) son iguales: luego si del triángulo YNZ se quita el triángulo YOL; y á lo remanente LOZN se añade el triángulo KOZ, serán el triángulo YNZ y el trapezio KLNZ iguales: dicho triángulo es la mitad del paralelógramo: (34, 1 Eucl.) luego tambien dicho trapezio.

PROP. XII. Teorema.

En qualquiera quadrilátero ABCD (fig. 11.) la recta CE, tirada del ángulo C paralela á la diagonal DB, corta el lado AB continuado en E de tal suerte, que AB á BE tiene la misma razon, que el segmento ABD al segmento BCD.

Demonstr. Tirada la línea DE quedan formados los triángulos BED, BCD iguales, por estar sobre la misma basa BD, y entre las paralelas EC, BD. (37, 1 Eucl.) Teniendo pues el triángulo BDA al triángulo EDB (por ser de una misma altura) la razon que tiene la basa AB á la basa BE, el triángulo BDA al triángulo BCD tendrá la razon de la basa AB á la basa BE. (7, 5 Eucl.)

PROP. XIII. Teorema.

En qualquiera polígono ABCDE (fig. 12.) las paralelas á las diagonales AC, AD determinan en los lados continuados la razon que tienen los segmentos entre sí.

Explicacion. Sea el polígono ABCDE, dividido con las diagonales AD, AC. Del ángulo E tírese ES paralela á AD, que cortará en S al lado CD continuado: tírese SO paralela á AC, y cortará en O al lado BC alargado: tírese tambien DQ paralela á AC. Digo que los segmentos AED, ADC, ACB tienen entre sí la misma razon que OQ, QC, CB.

De-

Demonstracion por la antecedente. En el quadrilátero AEDC, los segmentos AED, ADC son como SD á DC; esto es, (2, 6 Eucl.) como OQ á QC. Tambien en el quadrilátero ADCB, los segmentos ADC, ACB son como QC á CB: luego OQ, QC, CB tienen la misma razon, que los segmentos AED, ADC, ACB.

PROPOSICION XIV.

Dividir el triángulo GFE en qualesquiera partes, empezando las divisiones por un punto O dado dentro del triángulo. (fig. 13.)

Para principio de la division, tírese la recta OG al ángulo G: y tambien se podia tirar á qualquier punto de un lado. Pídese pues ahora, que se divida el triángulo en quatro partes, que tengan la misma proporcion que las rectas dadas A, B, C, D.

Operacion. Del punto O tírense las rectas OF, OE á los ángulos F, E: y desde G tírese GR paralela á OF, que cortará al lado EF continuado en R: desde R tírese RQ paralela á OE, que cortará al lado GE continuado en Q. Divídase (10, 6 Eucl.) la línea GQ en quatro partes, que tengan entre sí la misma razon, que las dadas A, B, C, D, y serán las divisiones GZ, ZP, PS, SQ. Tírense SH, PL paralelas á RQ; y porque SH corta al lado EF alargado fuera del triángulo, tírese del punto H la HV paralela á RG. Tírense del punto O las líneas OZ, OL, OV, y quedará dividido el triángulo en las quatro partes GOZ, ZOLE, LOVF, VOG, que tendrán la razon misma de las rectas A, B, C, D.

Demonstracion Porque la línea LP es paralela á la diagonal OE del rectilíneo ZOLE, será (12) el triángulo ZOE al triángulo EOL, como ZE á EP: y como (1, 6 Eucl.) el triángulo GOZ al triángulo ZOE sea como GZ á ZE, será el triángulo GOZ á los dos ZOE, EOL juntos; esto es, al rectilíneo ZOLE, como GZ á ZE, EP juntas, ó como á toda la ZP. Tambien porque en el rectilíneo ZOGFE son diagonales OF, OE las líneas GR, VH, RQ, HS, LP pa-

paralelas á dichas diagonales, cortan la línea ZQ de suerte, que ZOLE es á LOVF, como ZP á PS; y LOVF es á VOG, como PS á SQ: luego siendo como queda probado, GOZ á ZOLE, como GZ á ZP, tendrán los dichos segmentos la razon que tienen GZ, ZP, PS, SQ, que por construccion es la misma de A, B, C, D: luego queda dividido el triángulo como se mandaba.

PROPOSICION XV.

Dividir un paralelógramo en qualesquiera partes tirando líneas de un ángulo. (fig. 14.)

Pídese, que el paralelógramo CD se divida por el ángulo B en tres partes, que guarden entre sí la razon que las líneas M, N, O.

Operacion. Tírese la diagonal BA y CE su paralela, que cortará al lado DA continuado en E: divídase ED en tres partes proporcionales á las rectas M, N, O, y serán DG, GF, FE. Tírese FH paralela á EC: y tirando las rectas BH, BG, quedará dividido el paralelógramo como se deseaba.

Demonstracion. (13) Las CE, HF paralelas á la diagonal AB, determinan en la línea ED la razon de los segmentos: luego los segmentos CHB, AHBG, GBD tienen la misma razon que EF, FG, GD; esto es, que M, N, O por la construccion.

PROPOSICION XVI.

Dividir un paralelógramo en qualesquiera partes por un punto dado en uno de sus lados. (fig. 15.)

El paralelógramo ACDB se ha de dividir en tres partes iguales por el punto O dado en el lado DB.

Operacion. Tírense del punto O las líneas OA, OC á los ángulos: y desde el ángulo D, que es el mas próxîmo al punto O, tírese la DI paralela á OC, que cortará en I al lado AC continuado: tírese IL paralela á OA, que cortará en L al lado BA continuado. Divídase LB en tres partes iguales en M, P: tírese MH paralela á LI: y tirando las rectas

tas OH, OP, quedará dividido el paralelógramo como se deseaba. Demuéstrase como las antecedentes.

PROPOSICION XVII.

Dividir un paralelógramo en qualesquiera partes por un punto dado dentro, y una recta tirada de ese punto á qualquiera lado ó ángulo. (fig. 16.)

Sea dado el paralelógramo ABCD, y el punto O y la línea OG tirada al lado AB. Pídese, que por el punto O se divida el paralelógramo en dos partes, que sean como X á Z.

Operacion. Tírense desde O las líneas OA, OB, OC, OD á los ángulos. Desde el punto G tírese GE paralela á OB, que corta al lado CB continuado en E. Desde E tírese la EF paralela á OC, que corta en F al lado DC alargado. Desde F tírese FH paralela á DO, que corta en H al lado AD prolongado. Desde H tírese HI paralela á OA, que cortará en I al lado BA continuado. Divídase GI en dos partes GM, MI proporcionales con X, Z. Tírese MN paralela á AO; y porque corta á la AH en N fuera del paralelógramo, tírese NP paralela á DO. Desde O tírese la recta OP, y quedará dividido el paralelógramo en los rectilíneos POGAD, POGBC, que tendrán la misma razon, que IM á MG; esto es, que X á Z. Consta de las antecedentes.

PROPOSICION XVIII.

Dividir qualquiera polígono en partes que tengan una razon dada por un punto señalado en el lado, ó por el ángulo. (fig. 17.)

Sea el polígono AEDCB, y el punto F en el lado AB. Pídese se divida por el punto F en dos partes que tengan la razon de X á Z.

Operacion. Tírense del punto F á los ángulos las rectas FE, FD, FC, y continuados los lados DCG, EDH, AEI. Tírense las paralelas, empezando del punto B mas próxîmo á F, en esta forma: EG paralela á FC: GH paralela á FD:

FD: y HI paralela á FE. Divídanse AI en S de suerte, que AS á SI, sea como Z á X; y desde S tírese SL paralela á IH: y porque aun no corta lado alguno del polígono, tírese la LO paralela á HG, que corta al lado del polígono en O: tírese la FO, y quedará partido en dos partes, que la mayor á la menor será como Z á X. De la misma suerte se hará dicha division por el ángulo.

PROPOSICION XIX.

Dividir el polígono ABCDE en dos partes que tengan la razon de X á Z por un punto dado dentro del polígono. (*fig.* 18.)

Operacion. Del punto O tírese OF al lado ó al ángulo para empezar de allí la operacion. Tírense desde O rectas á los ángulos; y alargados los lados, como se vé en la figura, empiécense á tirar las paralelas del punto F, en esta forma: FG paralela á OB: GH paralela á OC: HI paralela á DO: IK paralela á OE: y KL paralela á OA. Divídase FL en M en dos partes, que sean como X á Z, así FM á ML; y desde M tírese MN paralela á LK; y porque aun no corta lado alguno del polígono, tírese NP paralela á KI: y porque tampoco corta el lado del polígono, tírese PR paralela á IH, que corta al lado del polígono en R: tírese la OR, y quedará dividido el polígono en dos partes, que (13) tienen la razon de FM á ML; esto es, de X á Z.

PROPOSICION XX.

Dividir un trapezio, cuyos dos lados sean paralelos, con líneas tiradas de un lado paralelo al otro. (*fig.* 19.)

El trapezio ABCD tiene los lados AD, BC paralelos. Pídese se divida en tres partes iguales, con líneas que pasen de un lado paralelo al otro.

Operacion. Divídase tanto el lado AD, como BC en tres partes iguales, en los puntos G, H, E, F. Tírense las

GE,

GE, HF, y quedará dividido. Tírense AE, GF, HC.

Demonstracion. Los triángulos BAE, EGF, FHC, por tener iguales basas, y estar entre las paralelas AD, BC son iguales. Asimismo son iguales AEG, GFH, HCD: (38, 1 Eucl.) luego el segmento BAGE compuesto de los dos BAE, AEG, es igual al segmento EGHF compuesto de los otros dos, y este es igual al tercero: luego los tres segmentos son iguales.

LIBRO V.

DE LA PROPORCION, AUMENTO Y DIMINUCION DE LAS FIGURAS PLANAS.

PROPOSICION I.

Dado un rectilíneo, hacer otro semejante, con quien tenga una razon determinada. (fig. 1.)

1 Sea dado el rectilíneo A: pídese otro con quien tenga el primero la razon de BC á F.

Operacion. Hállese una media proporcional entre BC y F, (13, 6 Eucl.) y sea HG. Hágase sobre HG (5, 2 de este) el rectilíneo I semejante al rectilíneo A, y tendrá A á I la razon de BC á F.

Demonstracion. Por ser proporcionales las tres BC, HG, F, será la razon de BC á F duplicada de la razon de BC á HG: y como (20, 6 Eucl.) el rectilíneo A al rectilíneo I tenga tambien la razon duplicada de BC á HG, tendrá A á I la razon de BC á F.

2 Sea dado el rectilíneo ABF: (*fig.* 2.) pídese otro semejante, tal, que ABF al segundo tenga la razon que tiene la línea G á la línea H.

Operacion. Hállese la media proporcional M entre G y H. Búsquese ahora una quarta proporcional BC á las lí-

líneas G, M, AB; esto es, sea G á M, como AB á CB. (12, 6 Eucl.) Hágase sobre BC el rectilíneo CBE semejante á ABF, y será este á aquel, como G á H.

Demonstracion. El rectilíneo ABF al rectilíneo CBE tiene la razon duplicada de AB á CB: y siendo (*por construccion*) AB á CB, como G á M, tendrá el rectilíneo ABF al rectilíneo CBE la razon duplicada de G á M: y como G á H tenga tambien la razon duplicada de G á M, tendrá ABF á CBE la razon de G á H.

COROLARIO.

Lo que se ha dicho de los rectilíneos, se ha de entender tambien de los círculos y demas figuras planas; de suerte, que el círculo que tuviere por diámetro la recta AB, al círculo cuyo diámetro fuere CB, tendrá la razon que G á H; porque (2, 12 Eucl.) los círculos tienen la razon duplicada de sus diámetros: luego el círculo cuyo diámetro es AB, al círculo cuyo diámetro es CB, tiene la razon duplicada de AB á CB, estas tienen la razon de G á M: luego tambien dichos círculos G á H tiene razon duplicada de G á M: luego los círculos son como G á H.

PROPOSICION II.

Hallar la razon que tienen entre sí los rectilíneos semejantes. (fig. 2.)

En la misma figura sean los rectilíneos ABF, CEB. Búscase la razon que tienen entre sí.

Operacion. Hállese una tercera proporcional á las líneas AB, CB, y sea DB: y tendrá el rectilíneo AFB al rectilíneo CEB la razon de AB á DB.

Demonstracion. El rectilíneo AFB al CEB tiene (20, 6 Eucl.) razon duplicada de AB á CB; y pues AB á DB tiene tambien la duplicada de AB á CB, tendrán los rectilíneos la razon de AB á DB.

PRO-

PROPOSICION III.

Dado un rectilíneo, señalar otro semejante, doblado, tresdoblado, &c. (fig. 3.)

Sea dado el rectilíneo OXA : pídese otro que sea duplo, otro que sea triplo, &c. semejante al primero.

Operacion. De la extremidad de qualquiera lado como de OA, tírese la perpendicular AF á discrecion: córtese AC igual á AO: tírese OC, y el rectilíneo semejante hecho sobre OC, y de la misma manera que OXA será doblado de dicho rectilíneo; tómese con el compas la OC, y pásese desde A hasta Z: tírese la OZ, y el rectilíneo semejante hecho de la misma suerte sobre OZ, será tresdoblado: y si OZ se pasa de A hasta K, el rectilíneo sobre OK será quádruplo de OXA; y así infinitamente.

Demonstr. Por ser el ángulo OAC recto, el rectilíneo hecho sobre OC (31, 6 Eucl.) es igual á los rectilíneos semejantes hechos sobre OA, AC: y como estos sean iguales, por ser OA, AC iguales, es el rectilíneo hecho sobre OC doblado de OXA. Asimismo el rectilíneo hecho sobre OZ es igual á los semejantes hechos semejantemente sobre OA, AZ; y siendo el rectilíneo sobre AZ ú OC su igual doblado del rectilíneo OXA, será el delineado sobre AZ triplo del OXA; y así en los demas.

COROLARIO.

Lo mismo que se ha hecho en los rectilíneos, se executará en los círculos, de suerte, que el círculo que tuviere por diámetro OC, será doblado del que tuviere por diámetro OA; y el que tuviere por diámetro OZ, será triplo, &c. Y es la razon, porque (2, 12 Eucl.) los círculos son como los quadrados de los diámetros: siendo pues (47, 1 Eucl.) el quadrado de OC igual á los quadrados de OA, AC, y por consiguiente doblado del quadrado de OA, será tambien el círculo que tuviere por diámetro OC igual á los círculos cuyos diámetros fueren OA, AC, y por consiguiente doblado del círculo cuyo diámetro fuere OA; y así en las demas figuras planas.

PROPOSICION IV.

Aumentar ó disminuir un rectilíneo, segun qualquiera razon dada. (*fig.* 4.)

1 Sea dado el rectilíneo ABC: pídese, que se aumente en razon tripla, ó que se haga otro semejante, que sea tres veces mayor. Puédese esto hacer por la regla de la proposicion antecedente, quando la proporcion que se pide es multíplice; pero siendo otra, se hará del modo siguiente mas universal.

Tírese á discrecion la recta DG: córtese ED igual al lado AB del rectilíneo ó á otro qualquiera: y porque el que se pide ha de ser triplo de ABC, hágase EG tripla de ED; y así en las demas proporciones. Hállese (13, 6 Eucl.) la EF media proporcional entre DE, EG, y el rectilíneo hecho semejantemente sobre EF será triplo de ABC. Tómese pues AH igual á EF, y perficiónese el rectilíneo AHI, que será triplo de ABC.

Demonstracion. Por ser EF media proporcional entre GE, ED, es el rectilíneo hecho sobre EF al semejante hecho sobre DE, como GE á ED: (2) siendo pues GE tripla de ED, será el rectilíneo sobre EF triplo del rectilíneo sobre ED: luego AHI es triplo de ABC.

2 Dado el rectilíneo RSL, se ha de formar otro semejante, que sea subtriplo, ó su tercio.

Operacion. Tómese GE igual á RS: divídase EG en tres partes iguales, por pedirse subtriplo: añádase directamente ED igual á una de las tres partes: hállese como ántes la media proporcional EF entre GE, ED: tómese RN igual á EF, y tirando MN paralela á LS, quedará formado el rectilíneo RNM semejante y subtriplo de RSL.

PROPOSICION V.

Dadas qualesquiera figuras planas semejantes, hacer una que sea igual á todas juntas. (*fig.* 5.)

Sean dadas qualesquiera figuras semejantes, cuyos lados homólogos, ó cuyos diámetros (si fueren círculos)

sean

sean A, B, C, D. Pídese una figura semejante, que sea igual á la suma de todas.

Operacion. Tírese EF igual á la línea A, y hágase FG igual á la línea B, y perpendicular á EF: tírese EG, y del punto G hágase la perpendicular GH igual á la línea C: tírese EH, y del punto H sáquese la perpendicular HI igual á la línea D, y tírese EI: hágase sobre EI una figura semejante y de la misma suerte que las otras, y será igual á todas juntas.

Demonstracion. Porque el ángulo F es recto, será (31, 6 Eucl.) el rectilíneo hecho sobre EG igual á los semejantes hechos sobre EF, FG; esto es, sobre A y B. Asimismo, porque el ángulo EGH es recto, será el rectilíneo hecho sobre EH igual á los rectilíneos hechos semejantemente sobre GH ó C, y sobre EG; esto es, sobre A y B. De la misma suerte el rectilíneo hecho sobre EI es igual á los hechos sobre EH, HI; esto es, á los rectilíneos juntos hechos sobre A, B, C, D, que es lo que se deseaba.

PROPOSICION VI.

Hallar la diferencia que hay entre dos figuras semejantes. (*fig.* 6.)

Pídese la diferencia que hay entre una figura plana hecha sobre CB, y otra su semejante hecha sobre la línea Z.

Operacion. Sobre la línea mayor CB hágase un semicírculo: córtese CA con la distancia igual á Z, y tírense las líneas AC, AB. Digo que la figura hecha sobre BC excede á la figura semejante hecha sobre AC ó Z, en otra figura semejante hecha sobre AB.

Demonstracion. El ángulo A hecho en el semicírculo, es recto: (31, 3 Eucl.) luego (31, 6 Eucl.) la figura hecha sobre CB será igual á las semejantes hechas de la misma suerte sobre CA, AB: luego si de la hecha sobre CB se quitase la figura hecha sobre CA, el residuo sería igual á la figura semejante hecha sobre AB.

PROPOSICION VII.

De un círculo dado cortar un círculo menor, que sea igual al anillo residuo. (*fig.* 7.)

Sea dado el círculo AMOE : pídese, que de este se quite un círculo que sea igual al anillo que sobrare.

Operacion. Divídase la semiperiferia AMO en dos partes en M: tírense las cuerdas MA, MO: divídase MA por medio en I, y con el intervalo IA hágase desde el centro G el círculo CNLF; y el anillo ó espacio que quedará entre las dos periferias será igual al círculo dicho CNLF.

Demonstracion. Por ser el ángulo M recto, (31, 3 Eucl.) el círculo cuyo diámetro es AO; esto es, el círculo AMOE es igual á los dos círculos que tuvieren por diámetros las MA, MO: y siendo estas líneas iguales, por ser cuerdas de arcos iguales, será el círculo AMOE doblado del círculo que tuviere por diámetro AM; siendo pues CL igual á AM, será el círculo AMOE doblado del círculo CNLF: luego este es su mitad: luego el anillo será la otra mitad, y por consiguiente son iguales.

PROPOSICION VIII.

Hacer un anillo igual á un círculo dado. (*fig.* 8.)

Supónese dado el círculo QFEH, y el otro AGOI. Pídese el círculo SMLN, tal, que el anillo comprehendido entre este y el mayor, sea igual al círculo QFEH.

Operacion. Hállese (6) el diámetro del círculo igual á la diferencia entre los círculos AGOI y QFEH, y será SL. Hágase del diámetro SL el círculo SMNL, y el anillo comprehendido entre AGOI y SMNL será igual al círculo QFEH. Consta de las proposiciones pasadas y de la misma operacion.

PROPOSICION IX.

Hacer un círculo igual á un anillo dado. (*fig.* 8.)

Sea dado el anillo comprehendido entre AGOI, SMLN. Pídese un círculo igual á dicho anillo.

Ope-

Operacion. Hállese (6) el diámetro del círculo igual á la diferencia de los círculos sobredichos que forman el anillo, y será QE. Con este diámetro hágase el círculo QFEH, y este será igual al anillo propuesto. Consta de lo dicho.

De esta manera se cortará de qualquier rectilíneo un otro semejante que sea igual al marco que sobrare: y al contrario, se formará un marco igual á un rectilíneo, con iguales ángulos y del mismo número de lados.

LIBRO VI.

DE LA TRANSFORMACION DE LAS FIGURAS RECTILÍNEAS.

LA transformacion de las figuras consiste en describir una figura igual á otra, pero desemejante á ella, y así el triángulo se transforma en quadrado, haciendo un quadrado igual á un triángulo. Los rectilíneos se pueden transformar en rectilíneos, como tambien los curvilíneos en curvilíneos, y estos mismos en rectilíneos; y al contrario. En este libro trataré solamente de la transformacion de rectilíneos en rectilíneos, dexando las demas para el siguiente.

PROPOSICION I.

Transformar un triángulo en otro triángulo. (*fig.* 1.)

Caso 1. Pídese, que el triángulo ABC se transforme en otro qualquiera.

Operacion. Tírese por el vértice B la BD paralela á la basa AC: de los puntos A, C, á qualquiera punto de BD tírense las rectas AD, CD, y será (37, 1 Eucl.) el triángulo ADC igual al triángulo ABC. Si se pide que uno de sus ángulos sea igual al ángulo O, se hará el ángulo DAC igual al ángulo O, y se obrará como ántes.

Caso 2. (*fig.* 2.) Dado el triángulo ABC, se pide otro

otro igual cuya basa sea AG, y el ángulo sobre la basa sea igual al ángulo O.

Operacion. Tírese BD paralela á la basa AC: hágase el ángulo DAC igual al ángulo O: tírese la oculta DG y su paralela CF, hasta que encuentre con AD continuada en F: tírese GF, y el triángulo AFG será igual al triángulo ABC: tírese DC.

Demonstracion. Los triángulos DFG, DCG tienen una misma basa DG, y están entre las paralelas DG, FC: luego (37, 1 Eucl.) son iguales: luego si á entrambos se añade el triángulo ADG, resultarán ADC, AFG iguales: el triángulo ADC es igual á ABC: (37, 1 Eucl.) luego AFG es tambien igual á ABC, como se deseaba.

Caso 3. (*fig.* 3.) Sea dado el triángulo AFG: pídese otro igual al sobredicho, que su basa sea AC, y su ángulo vertical igual al ángulo O.

Operacion. Tírese la oculta CF; y del punto G hágase GD paralela á CF, que cortará al lado AF en D: por D hágase BD paralela á la basa; y tirando la DC será el triángulo ADC igual al triángulo AFG, por lo demonstrado. Hágase ahora sobre la recta AC el segmento de círculo ABFC, capaz de un ángulo igual á O, (10, 2 de este trat.) y su circunferencia cortará á la paralela BD en B: tírense las líneas AB, BC, y quedará formado el triángulo ABC igual al triángulo ADC: (37, 1 Euclíd.) y por consiguiente igual al dado AFG; y su ángulo vertical B igual al ángulo O, por estar en el segmento ABFC capaz únicamente de dicho ángulo. Si el círculo no cortare la paralela BD, será imposible lo que se pide.

PROPOSICION II.

Hacer un paralelógramo igual á un triángulo. (*fig.* 4.)

Este Problema queda resuelto en el *lib.* 1 de la *Geom. Element. prop.* 42 *y* 44; pero esto no obstante, le resolveré del modo siguiente. Los lados CA, AX del triángulo ACX divídanse por medio en P y S, y por estas divisiones tírese la recta SP larga á discrecion; y juntando CZ paralela á XS, será el paralelógramo SC igual al triángulo ACX.

De-

Demonstr. Habiéndose dividido proporcionalmente los lados AC, AX en S y P, es (2, 6 Eucl.) la línea SP paralela á XC, con que XZ es paralelógramo; y teniendo este la misma altura del triángulo ACX y la mitad de su basa, será igual al triángulo. Asimismo, dividiendo por medio los lados CA, CX en P y O, y tirando la recta EQ por P y O, y levantando desde A y X qualesquiera paralelas AE, XQ, será el paralelógramo AQ igual al triángulo ACX, por tener la misma basa del triángulo y la mitad de su altura.

PROPOSICION III.

Hacer un triángulo igual á un paralelógramo. (*fig.* 5.)

Caso 1. Pídese un triángulo, qualquiera que sea, igual al paralelógramo dado AE.

Operacion. Continúense á discrecion los lados FE, AC: tómese CI igual á AC: y sobre toda la basa AI hágase qualquiera triángulo AHI, que tenga su vértice en la línea FH, y será igual al paralelógramo AE, por tener la misma altura y doblada basa. Si se pidiere, que un ángulo sea igual al ángulo O, se haria el ángulo HAI igual á O, y se obraria como ántes.

Caso 2. Dado el mismo paralelógramo AE, se pide un triángulo igual al dicho paralelógramo, que tenga un lado igual á X, y un ángulo igual á O.

Operacion. Hágase como ántes qualquiera triángulo AHI igual al paralelógramo AE: y (por la 45, 1 Eucl.) sobre la recta VQ igual á X hágase el paralelógramo RQ con un ángulo igual á O, y que sea igual á dicho triángulo AHI: continúese VR hasta que RT sea igual á VR; y tirada la QT será el triángulo VQT el que se pide, como consta de lo dicho.

PROPOSICION IV.

Hacer un paralelógramo igual á otro paralelógramo. (*fig.* 6.)

Caso 1. Pídese un paralelógramo igual al paralelógramo AO, con un ángulo igual al ángulo X.

Ope-

Operacion. Extiéndase CO, y hágase el ángulo BAE igual á X: y tirada BQ paralela á AE, será el paraleló-gramo AQ igual á AO, por la 35 del 1 de Euclides.

Caso 2. (*fig.* 7.) Pídese un paralelógramo igual al AO, con un ángulo igual á X, y sobre la línea AR.

Operacion. Tírese la diagonal CB: hágase (1) el triángulo AFR igual al triángulo ACB, y que tenga el ángulo A igual á X: tírese FP paralela á AR; y RP paralela á AF: y será el paralelógramo AP igual á AO como se deseaba.

Demonstr. Los triángulos ACB, AFR son iguales por construccion: y siendo aquel la mitad del paralelógramo AO, y este la mitad de AP, serán estos paralelógramos iguales.

Caso 3. (*fig.* 8.) Pídese, que el paralelógramo AP se convierta en otro, que tenga por basa la recta AB y un ángulo igual á X.

Operacion. Tírese FB, y por R hágase la RE paralela á BF por E: tírese CO paralela á la basa AB: fórmese ahora el ángulo CAB igual á X, y tirando OB paralela á CA, quedará formado el paralelógramo AO como se deseaba, igual á AP: tírense RF, EB.

Demonstr. El triángulo AFR es igual al triángulo AEB: (1) luego el paralelógramo AP, que es doblado del triángulo AFR, es igual al paralelógramo AO, que es doblado del triángulo AEB: y siendo el ángulo A igual á X, tiene todo lo que pide la propuesta.

PROPOSICION V.

Hacer un paralelógramo igual á un quadrado. (*fig.* 9.)

En la *prop.* 14 del *lib.* 2 de la *Geometr. Elem.* se dió el modo para hacer un quadrado igual á un paralelógramo: ahora se pide un paralelógramo igual al quadrado AZ.

Operacion. Tómese qualquiera recta EF, ó la que se diere determinada: y á las dos EF, AX hállese una tercera proporcional FC, (11, 6 Eucl.) la qual se tirará perpendicular á EF, y se perficionará el paralelógramo EC, que será igual al quadrado AZ. Si se determinare el ángulo, se hará el ángulo LEF igual al que se diere; pero siempre ha de pasar la paralela LCI por la extremidad de la perpendicular FC.

De-

Demonstracion. Por ser AX media proporcional entre EF y FC, será (17, 6) el rectángulo EC hecho de las extremas, igual al quadrado AZ de la media AX. Y tambien el paralelógramo EI será igual á dicho quadrado, por ser igual al rectángulo EC. (35, 1)

PROPOSICION VI.

Hacer un quadrado igual á un triángulo. (*fig.* 10.)

Pídese un quadrado igual al triángulo ACB.

Operacion. Del ángulo C tírese CD perpendicular á la basa: búsquese una media proporcional entre CD y AE mitad de la basa, que será IH: hágase sobre IH el quadrado IP, y será igual al triángulo.

Demonstracion. El triángulo ACB es (42, 1 Eucl.) igual al paralelógramo hecho de CD y AE mitad de la basa: este paralelógramo es igual al quadrado IP hecho de IH, media proporcional entre CD y AE: (17, 6 Eucl.) luego el quadrado IP y el triángulo dado son iguales.

PROPOSICION VII.

Formar un triángulo igual á un quadrado. (*fig.* 10.)

Caso 1. Pídese qualquiera triángulo igual al quadrado CA.

Operacion. Tómese para basa qualquiera línea OP: y á las dos OP primera y CH segunda, hállese IL tercera proporcional: esta se elevará perpendicularmente sobre qualquiera punto de OP: duplíquese IL, y será toda la IS altura del triángulo: tírense pues SO, SP, y será el triángulo OSP igual al quadrado CA. Si se pidiere, que el ángulo SOP sobre la basa sea igual al ángulo Z, se tirará la QS paralela á la basa, por la extremidad de la perpendicular IS: y hecho el ángulo O igual á Z, se continuará la recta OS hasta que encuentre con la paralela QS: y tirando SP, quedará formado el triángulo igual al quadrado CA.

Demonstracion. El triángulo OSP es igual al paralelógramo hecho de su basa OP y IL mitad de su altura, como

mo

mo se colige de la 41 del 1 de Eucl. y siendo (17, 6 Eucl.) este paralelógramo de OP, IL, por formarse de las extremas, igual al quadrado CA hecho de la media CH, será el triángulo OSP igual al quadrado CA.

Caso 2. Pídese un triángulo igual al quadrado CA, que tenga el ángulo vertical igual al ángulo X, y que su altura sea SI.

Operacion. A las dos rectas SI primera, CH segunda, hállese una tercera proporcional, que será OM: duplíquese, y será OP la basa del triángulo: tírese la paralela QS, y hágase (10, 2 de este trat.) sobre OP un arco de círculo capaz del ángulo X, que cortará á la paralela QS en S. Tírense de la interseccion S las rectas SO, SP; y el triángulo SOP será igual al quadrado CA por la razon sobredicha. Si el círculo no cortare la paralela QS, será la propuesta imposible.

PROPOSICION VIII.

Convertir qualquiera rectilíneo dado en triángulo. (*fig.* 11.)

Este método es general para convertir qualquiera rectilíneo en triángulo. En la *prop.* 45 del *lib.* 1 de la *Geom. Elem.* dí alguna noticia de ella, ofreciendo para este tratado su mayor extension, y juzgo no seré molesto, aplicándo su práctica á diferentes rectilíneos, para hacer mas patente su universalidad.

1 Pídese, que el quadrilátero ABCD se convierta en triángulo.

Operacion. Tírese la diagonal BD: y desde C su paralela CE, que cortará la basa prolongada en E, tírese BE; y el triángulo ABE será igual al quadrilátero.

Demonstracion. Los triángulos BCD, BED, por tener la misma basa BD, y estar entre las paralelas BD, CE, son iguales: (37, 1 Eucl.) añádase á entrambos el triángulo ABD, y resultarán el triángulo ABE y el quadrilátero ABCD iguales.

2 Pídese, que el pentágono ABL, &c. (*fig.* 12.) se convierta en triángulo.

Operacion. Tírese LA y su paralela BG: tírese LF y su paralela CE: tírense LG, LE á los puntos G y E, en que

las

las dichas paralelas cortan la basa prolongada, y el triángulo GLE será igual al pentágono.

Demonstracion. Los triángulos LCF, LFE son iguales, por tener la misma basa LF, y estar entre las paralelas LF, CE: luego si al pentágono se le quita el triángulo LCF, y en su lugar se pone el triángulo LFE, será el pentágono igual al quadrilátero ABLE. Asimismo son iguales los triángulos LBA, LGA: luego si del quadrilátero ABLE se quita el triángulo LBA, y se substituye LGA, resultará el triángulo GLE igual al quadrilátero ABLE, y por consiguiente igual al pentágono.

3 Pídese, que el exágono ABC, &c. (*fig.* 13.) se convierta en triángulo.

Operacion. Tírese la recta EF y su paralela IO, y tirando la EO, quedará el exágono convertido en el pentágono ABC, EO: este se reducirá á triángulo como ántes, y quedará el exágono reducido á triángulo. Con el mismo artificio se reducirá qualquier rectilíneo á triángulo, el qual consiste solamente en reducirle primero á un otro rectilíneo que tenga un lado ménos; este á otro que tenga un lado ménos; y asi succesivamente hasta que pare en triángulo.

Si el rectilíneo tuviere algun ángulo entrante, se reducirá á otro que no le tenga; y este se convertirá en triángulo del modo sobredicho.

Exemplo. El rectilíneo de la *fig.* 14. tiene el ángulo E entrante, redúzgole pues en esta forma: tírese DF y su paralela EX: tírese DX, y será el rectilíneo propuesto igual al ABCDX, sin ángulo entrante, como consta de lo dicho: y este se reducirá á triángulo, como el antecedente.

PROPOSICION IX.

Reducir qualquiera rectilíneo á triángulo de otra manera. (*fig.* 15.)

El siguiente modo universal de reducir los rectilíneos á triángulo, no es ménos ingenioso que el pasado; y siendo tan claro su fundamento, como fácil su execucion, no dudaré satisfacer á la curiosidad con proponerle, le, aunque me desvíe algo de la brevedad que profeso.

Pídese, que el rectilíneo de la *fig.* 15. se reduzga á triángulo.

Operacion. Del ángulo A tirense las diagonales AC, AZ, AE: y por el ángulo F inmediato al ángulo A tirese FO paralela á la diagonal AE, y cortará al lado ZE prolongado en O. Tírese la OV paralela á la diagonal AZ, que cortará al lado GZ alargado en V: tírese VQ paralela á la diagonal AC, que cortará en Q al lado PC continuado: tírese la recta AQ, y quedará hecho el triángulo APQ igual al rectilíneo propuesto.

Demonstracion. Tirada la recta AO, serán los triángulos AFE, AOE iguales, por tener la misma basa AE, y estar entre las paralelas AE, FO: luego si del rectilíneo dado se quita el triángulo AEF, y en su lugar se substituye AEO, será el rectilíneo APCZOA igual al rectilíneo dado. Asimismo, tirada la recta AV, serán iguales los triángulos AOZ, AVZ, por estar sobre la basa AZ, y entre las paralelas AZ, OV: luego si del rectilíneo APCZOA se quita el triángulo AOZ, y se substituye AVZ, quedará el rectilíneo APCVA igual á APCZOA. Tambien los triángulos ACV, ACQ son iguales por tener la misma basa AC y terminarse en su paralela VQ: luego añadiendo á entrambos el triángulo APC, quedará el triángulo APQ igual al rectilíneo APCVA, y por consiguiente al rectilíneo dado.

PROP. X. Teorema.

Los rectilíneos semejantes se reducen por el modo de la proposicion pasada á triángulos semejantes. (*fig.* 16.)

Sean los rectilíneos propuestos en la *fig.* 16. semejantes y reducidos por la proposicion antecedente á los triángulos BSA, OHN iguales á los rectilíneos, cada uno al suyo. Digo que estos triángulos son semejantes.

Demonstracion. Porque los rectilíneos son semejantes, son tambien los triángulos internos en que están resueltos semejantes: (20, 6 Eucl.) y por ser QE paralela á DA,

y

y MP á VN, son los ángulos alternos ADE, DEQ iguales, como tambien NVP, VPM; y siendo ADE igual á NVP, será tambien DEQ igual á VPM. Asimismo por ser paralelas las dichas líneas, será el ángulo CDA igual al ángulo DQE, como tambien IVN á VMP; y siendo CDA igual á IVN, será el ángulo Q igual á M: luego DEQ y VMP son equiángulos y semejantes. De la misma suerte probaré ser semejante el triángulo CSQ al triángulo IHM: luego los rectilíneos SBAEQ, HONPM compuestos de igual número de triángulos semejantes, son semejantes entre sí; y el ángulo O será igual al ángulo B; y serán proporcionales sus lados HO á ON, como SB á BA: luego los triángulos OHN, BSA son equiángulos y semejantes.

PROPOSICION XI.

Dados dos rectilíneos, hacer un rectilíneo igual al uno, y semejante al otro. (*fig.* 17.)

Este problema se resolvió ya en la *prop.* 25 del *lib.* 6 de la *Geom. Elem.* pero por ser aquel modo tan cansado por su prolixidad, explico aquí otro mas breve fundado en el teorema precedente.

Pídese un rectilíneo semejante al dado OZE é igual al rectilíneo BHGC.

Operacion. Háganse (9) los triángulos BAC, ORE iguales, cada uno á su rectilíneo: tírense sus perpendículos AS, RV: prosígase VR hasta X de suerte, que VX sea igual á SA. Tírese por X la XF paralela á la basa OE: continúese el lado ER, hasta que corte la paralela en F: desde F tírese FP paralela al lado RO. Hállese la media proporcional EQ entre BC y EP. Hágase sobre EQ (5, 2 de este trat.) un rectilíneo semejante al OZE, y este será igual al rectilíneo BHGC.

Demonstracion. Por ser el triángulo ORE igual al rectilíneo OZE, (9) el triángulo PFE, que es semejante á ORE, (2, 6 Eucl.) será igual (10) al rectilíneo hecho sobre PE semejante á OZE: y siendo la altura XV del triángulo PFE igual á la altura AS del triángulo BAC, será el triángu-

lo

lo PFE al triángulo BAC (1, 6 Eucl.) como la basa PE á la basa BC : luego el dicho rectilíneo sobre PE, é igual al triángulo PFE, al rectilíneo BHG, que es igual al triángulo BAC, será tambien cómo PE á BC : y como por ser PE, QE, BC continuas proporcionales, tenga PE á BC razon duplicada de la de PE á QE, se sigue, que el rectilíneo sobre PE semejante á OZE, tiene con el BHG razon duplicada de PE á QE : teniendo pues el rectilíneo hecho sobre PE á su semejante sobre QE tambien razon duplicada de PE á QE, (20, 6 Eucl.) tendrá el rectilíneo sobre PE á su semejante sobre QE, la misma razon que tiene al rectilíneo BHG : luego el rectilíneo sobre QE semejante á OZE, es igual al rectilíneo dado BHG.

Para mayor inteligencia de la práctica de estas reducciones, añado los dos exemplos siguientes.

Sea dado el triángulo ABC : (*fig.* 18.) pídese un triángulo equilátero igual á ABC.

Operacion. Hágase qualquiera triángulo equilátero : extiéndase su altura VR, hasta Z de suerte, que ZV sea igual á SA : tírese FZ paralela á la basa : continúese el lado ER hasta que encuentre en F con la paralela : tírese FP paralela al lado RO, que cortará la basa prolongada en P. Hállese entre BC y PE la media proporcional QE, y el triángulo equilátero QTE será igual á BAC.

Sea dado el pentágono irregular BDC : (*fig.* 19.) pídese se reduzca á regular.

Operacion. Redúzgase BDC al triángulo BAC. (9) Hágase un pentágono regular LTS, y redúzgase al triángulo LDS : tírese su perpendículo DP, y continúese hasta V de suerte, que VP sea igual á AS : tírese VQ paralela á la basa LS : continúese el lado SM hasta que corte la paralela en Q : tírese QI paralela á DL. Hállese la media proporcional OS entre IS y BC, y el pentágono regular hecho sobre OS será igual al irregular BDC.

Si la paralela VQ pasare mas abaxo del punto D, se obrará de la misma suerte, tirando la QI del punto en que dicha paralela corta al lado SM prolongado.

LI-

LIBRO VII.

DE LA TRANSFORMACION DE LAS FIGURAS CURVILÍNEAS.

DIvido este libro en tres capítulos: el primero, de la quadratura del círculo; el segundo, de la quadratura de la elipse; y el tercero, de la quadratura de la lúnula. En esto se comprehende lo, que se puede desear en esta materia; porque reducida qualquiera de las dichas figuras á quadrado, se podrá este reducir por el libro antecedente á qualquiera otro rectilíneo, con que quedarán reducidas al mismo las sobredichas figuras.

CAPITULO I.

DE LA QUADRATURA DEL CÍRCULO.

MODO I. De Arquimédes.

Por polígonos inscritos y circunscritos.

PROPOSICION I.

Dado en números el semidiámetro y la cuerda de un arco, hallar la cuerda de la mitad del arco. (*fig.* 1.)

SEa el radio OF 100 partes, y tenga FA 90 de esas mismas. Divídase la cuerda FA por medio en E; y tírese por E la recta OC, y quedará tambien el arco FCA dividido por medio en C. Pídese quántas partes de las 100 en que se supone dividido el radio, tendrá la recta ta FC, que es la cuerda de la mitad del arco FCA.

Operacion. Supuesto que AF es 90, su mitad EF será 45, y por ser el triángulo FEO rectángulo en E, (3, 3 Eucl.) será el quadrado de FO (47, 1 Eucl.) igual á los quadrados de FE, EO: luego si del quadrado de FO se resta el quadrado de FE, el residuo será el quadrado de EO. Quádrese pues 45, y será el quadrado de FE 2025; este quadrado réstese de 10000, quadrado del radio FO, y será el residuo 7975 quadrado de EO: sáquese su raiz quadrada, y será 89, y tantas partes del radio tendrá la linea OE: réstese OE 89 de OC 100, y el residuo será la linea EC 11. Y porque el triángulo FEC es rectángulo en E, serán los quadrados de CE y EF juntos, iguales al quadrado de CF: súmese pues 121 quadrado de CE, con 2025 quadrado de EF, y será la suma 2146 quadrado de FC: sáquese su raiz quadrada, y será 46, que es la cuerda FC. *El modo de sacar la raiz quadrada se explica en la Aritmética superior.*

PROPOSICION II.

Hallar próximamente la razon que tiene el diámetro de qualquier círculo con su circunferencia.

El artificio con que los Geómetras procuran averiguar la razon que tiene el diámetro de un círculo con su periferia, consiste en circunscribir al círculo un polígono regular de muchos lados, é inscribirle otro semejante, y hallar la razon que tiene el diámetro, tanto con el perímetro del uno, como con el del otro. Y como sea cierto que el ámbito del circunscrito es algo mayor que el del inscrito, y que la circunferencia del círculo viene á mediar entre los dos; hallado el perímetro de entrambos, y la diferencia del uno al otro, si se parte esta diferencia por medio, y se añade su mitad al ámbito del polígono inscrito, será la suma, sin diferencia notable, igual á la periferia del círculo, y se sabrá próximamente la razon que tiene con el diámetro. Por este camino la investigó el grande Arquimédes, suponiendo

cir-

circunscrito al círculo un polígono de 96 lados, y otro semejante inscrito, y obrando en la forma siguiente.

Supóngase en la *fig.* 2, que el diámetro AX es 20000000, para que salga mas exâcta la operacion. Supóngase tambien inscrito en el círculo el exágono regular; y siendo su lado igual al semidiámetro, tendrá 10000000 partes. Hállese ahora (1) la cuerda de 30 grados, que es la mitad del arco, que corresponde al lado del exágono, y será 5.778380, que es el lado del polígono de 12 lados. Búsquese asimismo el lado del polígono de 24 lados, que es la cuerda de 15 grados, y será 2.610524. De la misma suerte se hallará la cuerda de 7 grados y medio, que es el lado del polígono de 48 lados, y será 1.308062. Búsquese despues el lado del polígono de 96 lados, que es la cuerda de 3 grados y 45 minutos, y será 654380.

Hecho esto, se pasa á inquirir el lado del polígono circunscrito de 96 lados, de esta suerte: Supóngase, que AB es el lado del inscrito, y GE del circunscrito. Tírese del punto del contacto F el radio FC, que (3, 3 Eucl.) dividirá el lado AB por medio en I, con que AI será de 327190 partes, cuyo quadrado, si se resta del radio AC, será el residuo el quadrado de IC; y sacando su raiz quadrada, se sabrá que IC consta de 9.944493 partes.

Hágase ahora la regla de tres siguiente: Como CI á IA, así el radio CF á FG, (2, 6 Eucl.) y se hallará ser GF de 327366 partes, y por consiguiente toda EG 654732. Y quitadas las dos últimas cifras, tanto del lado del polígono inscrito, como del circunscrito, será el lado del inscrito 6543, y del circunscrito 6547. Multiplíquese ahora cada lado de estos por 96, y será el ámbito del circunscrito 628512, y el del inscrito 628128. La diferencia del uno al otro es 382, su mitad 191: añádase al lado del polígono inscrito, y será la circunferencia del círculo 628320, y el diámetro 200000, y quitando de ambas cantidades las tres últimas cifras, será la circunferencia 628, y el diámetro 200; esto es, reducido todo á menores términos, la circunferencia 157, y el diámetro 50: con que la circunferencia incluye tres veces al diámetro, y algo ménos que su séptimo: y mandando Arquimédes, que para hallar la circunferencia se triplique el diámetro, y se añada su séptima parte, hace la circunferencia algo mayor de lo justo.

Esto mismo se hallará con mayor precision, usando de un polígono de muchos mas lados, y haciendo la misma operacion, que se executará con mayor brevedad, usando de la Tabla de los senos y tangentes del círculo.

Razon de la circunferencia del círculo con su diámetro.

	Circunferencia	Diámetro.
Arquimédes	22	7
Adriano Mecio	223	71
Luis de Ceulen	314	100

Esta última se juzga por mejor.

PROPOSICION III.

Dado el diámetro de un círculo, hallar su circunferencia; y al contrario.

1 Dada la circunferencia de un círculo, se pide su diámetro.

Operacion. Elíjase qualquiera de las proporciones sobredichas, y se dispondrá una regla de tres, poniendo en primer lugar la circunferencia, segun se halla en la proporcion elegida; en segundo, el diámetro; y en el tercero, la circunferencia dada: y el quarto término será lo que se busca.

Exemplo. La circunferencia de la tierra tiene 6300 leguas Españolas: pídese, quántas leguas tendrá el diámetro. Dígase, si 22 dan 7, ¿qué darán 6300? y se hallarán 2004 leguas, y $\frac{12}{22}$ avos de legua, y tantas tiene el diámetro.

2 Dado el diámetro, se pide la circunferencia. Dispóngase la regla de tres como se sigue: Si 7 dan 22, ¿qué darán 2004 y $\frac{12}{22}$ avos de legua? y se hallarán 6300 leguas, y tantas tiene la circunferencia de la tierra.

PRO-

PROP. IV. Teorema.

La área del polígono circunscrito al círculo, es igual al rectángulo hecho del semidiámetro, y de la mitad de su periferia. (*fig.* 3.)

Supóngase qualquiera polígono ZCF, &c. circunscrito al círculo. Digo que su área es igual al rectángulo hecho del semidiámetro del círculo, y del semidiámetro del polígono. Resuélvase en triángulos, tirando del centro A las rectas AZ, AC, &c. á los ángulos: tírese tambien la línea AE al punto del contacto E, que (18, 3 Eucl.) será perpendicular al lado ZC.

Demonstracion. La área del triángulo ZAC es igual al rectángulo hecho de AE y de la mitad de ZC; porque (41, 1 Eucl.) si el rectángulo tuviese la misma basa ZC y la misma altura del triángulo, sería doblado: luego (1, 6 Eucl.) el que tiene la mitad de la basa ZC será la mitad del dicho rectángulo, y por consiguiente igual al triángulo. Por la misma razon, la área del triángulo CAF es igual al rectángulo hecho de AE y la mitad del lado CF, y así de los demas triángulos; luego siendo la área de todo el polígono igual á todos los triángulos juntos, será su área igual al rectángulo hecho del radio AE, y de una línea compuesta de las mitades de las basas ZC, CF, &c. que es la mitad de todo el ámbito.

PROP. V. Teorema.

El círculo es igual al rectángulo hecho de la semiperiferia y del radio.

La razon es, porque (por el *lema* 2 para la 2 del *lib.* 12 de la *Geom. Elem.*) los polígonos circunscritos al círculo degeneran en el círculo de suerte, que el círculo no se diferencia sensiblemente de un polígono circunscrito de muchos lados, ántes viene á ser un polígono de infinitos lados: luego siendo la área del polígono circunscrito igual al rectángulo de la semiperiferia y el radio, tambien la área del círculo es igual al rectángulo hecho de su semiperiferia y el radio.

COROLARIO.

La área de un sector es igual al rectángulo hecho de la mitad de su arco y del radio. Infiérese de lo dicho.

PROPOSICION VI.

Hacer un quadrado igual á un círculo.

Operacion. Hállese una media proporcional entre la semicircunferencia y el radio del circulo, y esta será el lado del quadrado igual al círculo.

Demonstracion. (5) La área del círculo es igual al rectángulo de su semicircunferencia y el radio; este rectángulo (17, 6 Eucl.) es igual al quadrado de la media proporcional entre la semicircunferencia y el radio: luego este quadrado es igual al círculo.

PROPOSICION VII.

Hacer un círculo igual á un quadrado. (*fig.* 4.)

Sea dado el quadrado M: pídese un círculo igual á dicho quadrado.

Operacion. Tírese á parte la línea CD larga á discrecion: tómese á arbitrio CB, que se supone ser 7 partes, y córtese BD, que tenga 22 de las mismas partes: sáquese una media proporcional entre CB, BD, que será AB: sáquese tambien una quarta proporcional á AB, BD, EF, y será como AB á BD, así EF á GH. Hállese ahora una tercera proporcional á las líneas GH, EF, y será GH á EF, como EF á IL. Digo que si de IL como radio se hace un círculo, será igual al quadrado M.

Demonstracion. Por la construccion es GH á EF como BD á AB; y siendo GH á EF como EF á IL, será EF á IL como BD á AB: y pues BD á AB es como AB á CB, será EF á IL como AB á CB. Son pues todas proporcionales en esta forma: GH á EF como BD á AB;

EF

EF á IL como AB á BC : luego por igualdad ordenada GH á IL es como BD á BC.

GH, EF, IL   BD, AB, BC

Siendo pues BD á BC como 22 á 7, razon de la periferia al diámetro, ú de la semiperiferia al semidiámetro, será GH á IL como 22 á 7: luego el rectángulo de GH, IL es igual al círculo hecho del radio IL; (6) el quadrado M es (17, 6 Eucl.) igual al dicho rectángulo : luego el quadrado M es igual al círculo del radio IL : y por consiguiente el círculo igual á dicho quadrado.

PROP. VIII. Teorema.

El quadrado á su círculo inscrito es próximamente como 14 á 11. (fig. 5.)

Digo que el quadrado BA al círculo inscrito, tiene próximamente la razon de 14 á 11.

Preparacion. Continúese el lado CB de suerte, que CF sea doblada de CB; y tirando la HI por el centro paralela á CB, perficiónese el rectángulo HF : córtese tambien (3) CG de suerte, que sea igual á la semiperiferia del círculo, y tírese GK paralela á CH.

Demonstracion. El rectángulo FH formado de HC, mitad del lado del quadrado, y por consiguiente igual al radio del círculo, y de CF doblada del lado CD, y por consiguiente doblada del diámetro del círculo, es igual al quadrado AB, por tener los lados recíprocos con los del quadrado. Tambien el rectángulo HG hecho de la misma HC igual al radio, y de CG igual á la mitad de la periferia del círculo, es igual al círculo : luego la misma razon hay del rectángulo FH al rectángulo GH, que hay del quadrado AB al círculo : siendo pues el rectángulo FH al GH, como la basa CF á la basa CG, (1, 6 Eucl.) por tener ambos una misma altura, será el quadrado AB al círculo, como la basa CF á la CG; la basa CF es 14, por ser dupla del diámetro, que es 7, y la basa CG es 11, por ser la mitad de la periferia, que es 22 : luego el quadrado AB al círculo inscrito, es cómo 14 á 11.

PRO-

PROPOSICION IX.

De lo dicho se coligen diferentes reglas para quadrar el círculo. (*fig.* 6.)

Pídese un quadrado igual al círculo M.

Regla 1. Divídase el diámetro LN en 14 partes iguales: córtese SN, que tenga 3 de dichas partes, y quedará LS de 11: levántese la perpendicular SO, y tírese la línea LO, y esta será el lado del quadrado igual al círculo M.

Demonstracion. El rectángulo QR al quadrado QP circunscrito, se ha como la basa QI á la basa QO; (1, 6 Eucl.) QI es 11, y QO es 14; luego el rectángulo QR al quadrado QP, es como 11 á 14; y siendo (8) el círculo M al mismo quadrado como 11 á 14, será el rectángulo QR igual al círculo; y como el quadrado de LO sea igual al rectángulo QR, por ser LO media proporcional entre LN, LS, (*corol.* 2 de la 8, 6 Eucl.) ó entre QI, IR sus iguales, será el quadrado de LO igual al círculo.

Regla 2 por número. Supongo por exemplo, que el diámetro LN es 112 partes: y para saber quántas le tocan á LS, digo, como 14 á 11, así 112 que es LN á 88, y estas le tocan á LS: multiplico 112 por 88, y el producto 9856 será el rectángulo QR, que como dixe es igual al círculo: sáquese la raiz quadrada de 9856, y será próximamente 99 y $\frac{1}{4}$, y este será el lado del quadrado igual al círculo.

Regla 3. Fórmese esta regla de tres: Como 7 á 22, así 112 á 352 circunferencia del círculo. Tómese la mitad de 112, y será 56: tómese tambien la mitad de 352, y será 176, que es la semiperiferia: multiplíquese 176 por 56, que es el semidiámetro, y será el producto 9856, rectángulo igual al círculo: (5) sáquese su raiz quadrada 99 y $\frac{1}{4}$, y será como ántes el lado del quadrado igual al círculo.

MODO II.

Por la línea quadratriz de Nicostrato y Nicomedes.

Nicostrato y Nicomedes antiguos Geómetras, para quadrar el círculo discurriéron una línea llamada *quadra-*

dra-

dratriz ó *quadrantal*; y aunque su descripcion no es en todo rigor Geométrica como verémos; pero sus usos son admirables, por lo que juzgo conveniente explicarla en este lugar.

PROPOSICION X.

Descripcion de la línea quadratriz. (*fig.* 7.)

En el quadrado ACBD descríbase el quadrante AB: divídase dicho quadrante en qualesquiera partes iguales, y en otras tantas el lado AC y el lado BD: en quanto mas partes se hiciere esta division, tanto será la operacion mas exâcta; pero por evitar confusion, divido tanto el arco AB como las AC, DB en ocho partes. Tírense las líneas ocultas de cada punto de AC, á su correspondiente en DB; y del centro C tírense tambien líneas ocultas á cada division del quadrante AB, y la primera cortará á ZE en E, la segunda cortará á KF en F, y así de las demas. Por estos puntos se irá describiendo la línea curva AEFH, y esta será la línea quadratriz. Aquí se vé claramente, que la descripcion de esta línea no es del todo Geométrica, por no haber método para señalar el último punto H. La AC se llama *lado de la quadratriz*, la CH es su *basa*, y C su *centro*.

PROP. XI. Teorema.

La línea tirada del centro por qualquiera punto de la quadratriz y la perpendicular de dicho punto al lado, cortan proporcionalmente el arco del quadrante y dicho lado. (*fig.* 7.)

Tírese el radio CP, que pase por qualquiera punto, como F de la quadratriz: tírese de F la perpendicular FK al lado AC. Digo ser proporcionales el arco AP al quadrante AB, como la línea AK con la AC.

Demonstracion. Por la construccion, en tantas partes iguales se divide el arco AB para formar la quadratriz, en quantas se divide AC: luego si AP es la quarta parte del

qua-

quadrante AB, tambien AK será la quarta parte del lado AC, y lo mismo dividiendo, convirtiendo, &c.

PROPOSICION XII.

Dividir un ángulo ó arco en qualesquiera partes iguales. (*fig.* 7.)

Por la línea quadratriz se resuelve el deseado problema de la triseccion del ángulo. Supóngase pues se ha de dividir el arco AM ó el ángulo ACM en tres partes iguales: tírese el radio CM, que corta la quadratriz en X: de X tírese la perpendicular XL: divídase AL en tres partes iguales en los puntos K, Z; y tírense las perpendiculares KF, ZE: por E y F tírense los radios CEO, CFP, y los arcos AO, OP, PM serán iguales.

Demonstr. (11) Las líneas AZ, ZK, KL son proporcionales con los arcos AO, OP, PM: aquellas tres líneas son iguales: luego tambien los tres arcos sobredichos son iguales, y por consiguiente queda AM dividido en tres partes iguales, y tambien el ángulo ACM, de quien es medida.

PROP. XIII. Teorema.

El arco AN del quadrante, el lado AM y la basa MC de la quadratriz, son continuas proporcionales. (*fig.* 8.)

Digo que el arco AN al lado AM, es como el lado AM ó MN á la basa MC de la quadratriz.

Preparacion. Si no fuese así, seria AN á AM como MN á ME, mayor que MC ó á otra menor: pruebo pues, que AN á AM no es como MN á ME; y para eso descríbase del centro M por E el quadrante EF, que cortará á la quadratriz en G: tírese GL perpendicular al lado AM y GI perpendicular á la basa MN.

Demonstr. El quadrante AN (segun se supone) al lado AM, es como MN á ME; y siendo tambien el quadrante AN al quadrante FE, como el radio MN al radio ME: (*corol.* de la *propos.* 2 del *lib.* 12 Eucl.) luego el qua-

dran-

drante FE y el radio MN ó AM son iguales. Tambien el quadrante NA al arco NH, es como el quadrante EF al arco EG; y siendo (por la formacion de la quadratriz) NA á NH como AM á LM, será AM á LM como EF á EG: y alternando, AM á EF como LM á EG: y habiendo probado ser MA igual al quadrante FE, se sigue ser LM ó GI su igual, igual al arco EG, lo que es absurdo: luego el quadrante AN á AM, no es como AM á ME mayor que MC. Por modo semejante probaré no poder ser el quadrante AN con AM, como AM con MI menor que MC: luego son proporcionales el quadrante AN con AM, como AM con MG.

PROPOSICION XIV.

Hallar una línea recta igual á la circunferencia de un círculo. (*fig.* 8.)

Operacion. Hállese una tercera proporcional O á la basa MG de la quadratriz y á su lado AM, y esta será igual á la periferia del quadrante AN; y tomada quatro veces, será enteramente la periferia del círculo.

Demonstracion. (13) MG con AM es como AM á la periferia AN del quadrante: siendo pues por construccion, MC con AM como AM con O, será la línea O igual al quadrante AN de la periferia; y tomada la línea O quatro veces, será igual á la periferia entera del círculo: con que este se quadrará por la *prop.* 6 de este libro.

MODO III.

Por la línea espiral de Arquimédes.

El celebrado Arquimédes para hallar una línea recta igual á la circunferencia de un círculo, y lograr el deseado fin de su quadratura, discurrió el artificio ingenioso de una línea espiral, cuya idea se formará fácilmente, si se concibe (*fig.* 9.) que la línea BA se mueve de tal suerte, que haciendo su extremo A centro en A, dé una vuel-

vuelta entera, corriendo el otro extremo B la circunferencia del círculo; y que al mismo tiempo un punto movible corra desde E hasta A, ú desde A hasta B, de suerte, que entrambos movimientos empiecen y acaben á un mismo tiempo. Con que habiendo corrido la AB el arco BM, octava parte del círculo, el otro movible habrá corrido la MI, octava parte del radio: en llegando AB á AC, corrida la quarta del círculo, el otro habrá baxado á D, quarta parte del radio; y así en lo restante, hasta haber corrido el radio todo el círculo, en el qual tiempo habrá llegado al centro A el otro movible.

Lo mismo será suponiendo, que el segundo movible empiece su movimiento del centro A: y en este caso, si hiciere segunda revolucion el radio, correria el segundo movible tanto como otro radio fuera del círculo.

PROPOSICION XV.

Describir la línea espiral de Arquimédes. (*fig.* 9.)

Divídase la circunferencia del círculo en muchas partes iguales, porque quanto fuere mayor su número, tanto será mas exâcta la descripcion. Divídase asimismo el radio en tantas partes, en quantas se dividió la circunferencia. Tírense radios á todas las divisiones de la circunferencia, y transfiéranse las divisiones del radio á los demas; es á saber, la primera al primero que se sigue despues del dividido, la segunda al segundo, la tercera al tercero, y así de los demas; váyase conduciendo por estos puntos una línea curva, y será la espiral que se desea.

COROLARIO.

De lo dicho se infiere, que las partes del radio comprehendidas entre el primer círculo y la espiral, son proporcionales con los arcos del mismo círculo; y así, porque DC es doblada de IM, el arco BC es doblado de BM.

PRO-

PROPOSICION XVI.

Dividir un ángulo en tres ó qualesquiera partes iguales. (*fig.* 10.)

Pídese, que el ángulo BAC se divida en tres partes iguales.

Operacion. Hecha la espiral CIEDA, tírese por la extremidad del radio AC el arco CB; y el segmento DB divídase en tres partes iguales; por las divisiones O, S háganse del centro A los arcos OI, SE, que cortarán la espiral en los puntos E, I: tírense por estos puntos las rectas AEF, AIG, y quedará dividida la circunferencia BA, y por consiguiente el ángulo BAC en tres partes iguales.

Demonstracion. (por el corol. preced.) Las partes de la circunferencia son proporcionales con las partes del radio: luego si DS, SO, OB son iguales, los arcos BF, FG, GC tambien son iguales.

PROPOSICION XVII.

Propónese la quadratura del círculo por la línea espiral. (*fig.* 10.)

Demuestra Arquimédes, que si del fin de la primera revolucion de la espiral se tira una tangente CL, cortará esta en el diámetro prolongado una línea AL igual á la periferia del círculo, con que se quadrará con facilidad por la *prop.* 6. Pero como Arquimédes no determine modo para tirar de dicha tangente, su artificio, aunque ingenioso, adelanta poco la quadratura; y así juzgo por conveniente no cansar con lo prolixo de su demonstracion.

CAPITULO II.

DE LA QUADRATURA DE LA ELIPSE.

ELipse es una especie de figura oval, que nace de la seccion obliqüa de una pirámide cónica ú de un cilindro, quando dicha seccion corta entrambos lados como AGHI,

AGHI. (*fig.* 11.) Tiene dos diámetros principales, uno *mayor* AH y otro *menor* GI. El punto C es el *centro de la elipse*; y los puntos F y E se llaman *puntos de comparacion* y *fócos de la elipse*, y distan igualmente del centro C: las rectas KL, MN, &c. paralelas á qualquiera de los diámetros, se llaman *ordenadas*, y sus mitades FL, ON, &c. semiordenadas.

Tiene la elipse insignes propiedades, que se demuestran en el tratado de *Secciones cónicas*: la mas principal y la que ahora hemos menester tener presupuesta, es que los quadrados de las ordenadas ú de las semiordenadas, tienen entre sí la misma razon, que los rectángulos hechos de los segmentos del diámetro, como el quadrado de FL, es al quadrado de CI, como el rectángulo AFH al rectángulo ACH; y así de las demas. Y es tan esencial esta propiedad á la elipse, que no se entiende otro por elipse, que una figura oval, que en virtud de su construccion tiene la propiedad sobredicha: con esto se demonstrarán las proposiciones siguientes.

PROP. XVIII. Teorema.

Las ordenadas en la elipse, á las ordenadas en el círculo del mayor diámetro sus correspondientes, tienen la misma razon, que el menor al mayor diámetro. (*fig.* 11.)

Explicacion. Del centro C de la elipse, con el radio CA, descríbase el círculo ASHV: las semiordenadas en la elipse son FL, CI, ON, &c. sus correspondientes en el círculo son FP, CS, OT. Digo que FL á FP es como CI semidiámetro menor de la elipse, á CS semidiámetro mayor; y asimismo ON á OT, es como CI á CS; y así todas las demas.

Demonstracion. Por naturaleza de la elipse el quadrado de FL al quadrado de CI, es como el rectángulo AFH al rectángulo ACH; y siendo (*corol.* de la *prop.* 13, 6 Eucl.) el rectángulo AFH igual al quadrado de FP, y el rectángulo ACH igual al quadrado de CS, será el quadrado de FL al quadrado de CI, como el quadrado de FP al quadrado de CS: y alternando, el quadrado de FL al quadrado de FP, FP, como el quadrado de CI al quadrado de CS: y como (20, 6 Eucl.) los quadrados tengan entre sí razon duplicada de la de sus lados, la razon duplicada de FL á FP será la misma que la duplicada de CI á CS: luego la misma razon hay de FL á FP, que de CI semidiámetro menor de la elipse, á CS semidiámetro mayor. Lo mismo se demonstrará de las demas semiordenadas.

Con semejante demonstracion se convence, que descrito el círculo GFIE del menor semidiámetro de la elipse, y tiradas las semiordinadas ZXY y las demas, es ZX á ZY como CF, semidiámetro menor de la elipse, á GA su semidiámetro mayor.

PROP. XIX. Teorema.

El círculo del mayor diámetro tiene con la elipse la misma razon, que tiene el diámetro mayor con el menor; y esa misma razon tiene la elipse con el círculo del menor diámetro. (fig. 11.)

Demonstracion. Considérense tiradas las ordenadas paralelas á VS, y quedará formada con ellas toda la área de la elipse y del círculo mayor: y siendo así (18) que todas las dichas líneas son cortadas por la elipse en la razon misma de CS á CI, se sigue, que todas las del círculo mayor juntas, á todas las de la elipse; esto es, la área del círculo mayor á la área de la elipse, tiene la razon de CS semidiámetro mayor, á CI semidiámetro menor. Asimismo, si se consideran todas las posibles dentro de la elipse paralelas á AH, se infiere tienen todas las de la elipse á todas las del círculo menor, la razon de AC semidiámetro mayor, á FC semidiámetro menor: luego el círculo mayor á la elipse, y esta al círculo menor, tiene la razon del semidiámetro mayor al semidiámetro menor.

COROLARIO.

El círculo mayor, la elipse y el círculo menor, son continuos proporcionales, por tener la razon misma del semidiámetro mayor al semidiámetro menor.

PRO-

PROPOSICION XX.

Hacer un círculo igual á una elipse. (fig. 11.)

Operacion. Hállese la línea B, media proporcional entre el semidiámetro mayor CS y el semidiámetro menor CI de la elipse; y el círculo que se hiciere de la línea B como semidiámetro, será igual á la elipse.

Demonstracion. El círculo mayor ASHV al círculo hecho de B, tiene (2, 12. Eucl.) razon duplicada del radio CS al radio B: y siendo la razon de CS á CI duplicada de la de CS á B, por ser proporcionales CS, B, CI, el círculo mayor ASHV al círculo hecho de B, será como CS á CI: el mismo círculo mayor á la elipse, (19) es tambien como CS á CI: luego el círculo hecho del radio B y la elipse, son iguales.

COROLARIOS.

1 *De lo dicho se colige el modo de reducir la elipse á quadrado; porque reducida á círculo, se convertirá este en quadrado por la* prop. 6.

2. *El rectángulo hecho de los diámetros de la elipse ó circunscrito á ella, y el quadrado del diámetro del círculo hecho de B ó circunscrito á dicho círculo, son iguales; porque el diámetro de este círculo es medio proporcional entre los diámetros de la elipse: luego (16, 6 Eucl.) son iguales.*

3 *Las elipses son entre sí como los rectángulos de sus diámetros; y así todo lo que se demonstró en la* Geom. Elem. *de los rectángulos, se debe entender de las elipses: y así las que tienen los diámetros recíprocos, son iguales. Las semejantes; esto es, las que tienen los diámetros proporcionales, tienen la razon duplicada de la de sus diámetros homólogos; las que tienen un diámetro igual, tienen la razon que el otro diámetro; y las que constan de desiguales diámetros, tienen razon compuesta de los mismos.*

CA-

CAPITULO III.

DE LA QUADRATURA DE LA LUNULA.

HIpócrates Chîo, que floreció 550 años ántes de Christo nuestro Señor, buscando la quadratura del círculo, halló la quadratura de la lúnula, para cuya noticia sirven las proposiciones siguientes.

PROPOSICION XXI.

Hacer un ángulo curvilíneo igual á un ángulo rectilíneo dado. (fig. 12.)

Aunque es impropia la igualdad ó desigualdad de los ángulos rectilíneos y curvilíneos, como dice en el *escolio* de la *prop.* 16 del *lib.* 3 de la *Geom. Elem.* esto no obstante, se satisfará la propuesta del modo siguiente. Pídese un ángulo curvilíneo igual al ángulo rectilíneo EAF.

Operacion. Tómense iguales AE, AF, y con el intervalo EA, haciendo centro en E y F, háganse los arcos AS, AB; y el ángulo curvilíneo SAB será igual al rectilíneo EAF.

Demonstr. Los ángulos mixtilíneos SAE, BAF son iguales, por ser de semicírculos iguales: luego si de entrambos se quita el ángulo BAE que es comun, quedarán SAB, EAF iguales.

PROPOSICION XXII.

Hacer un arbelo igual á un triángulo; y al contrario. (fig. 13.)

Operacion. Divídase el círculo AOCI en quatro partes iguales: tírense las líneas AC, IA, IC, y con el mismo radio NI del círculo descríbanse los arcos AQI, CPI, y haciendo centro en I hágase el arco AEC. Digo que el arbelo pintado con puntos, es igual al triángulo AIC.

Demonstr. Los arcos AQI, CPI son iguales á los arcos AFI, CLI; estos son la quarta parte de la periferia del cír-

círculo: luego tambien AQI, CPI: y siendo el arco AEC tambien la quarta parte de la periferia de su círculo, por ser medida del ángulo AIC recto, (31, 3 Eucl.) serán los segmentos N, S, R semejantes: luego (*cor.* de la *prop.* 15, 5 Eucl.) tendrán entre sí la misma razon que los círculos, de quienes son segmentos; estos (2, 12 Eucl.) tienen la razon de los quadrados de sus diámetros ú de sus semidiámetros: luego los segmentos N, S, R son como el quadrado del radio IA al quadrado del radio IN; y como el de IA sea (47, 1 Eucl.) duplo del quadrado de IN, se sigue, que el segmento N es duplo del segmento S: luego es igual á los segmentos S y R: luego si del arbelo se quita el segmento N, y en su lugar se añaden los segmentos S, R, resultará el triángulo AIC igual á dicho arbelo.

Como este triángulo AIC sea igual al quadrado AZIN, se sigue ser este quadrado igual al arbelo.

PROPOSICION XXIII.

Hacer un triángulo igual á la lúnula ABCDA. (*fig.* 14.)

Operacion. Divídase el círculo en quatro partes, con los diámetros AC, BP: tírense las AP, CP, y con la distancia PA hágase el arco ADC, y quedará formado el triángulo APC igual á la lúnula ABCDA.

Demonstracion. Por la razon dicha en la proposicion pasada, los segmentos S, R son iguales al segmento O: luego si del semicírculo ABC se quita el segmento O, y del semicírculo APC se quitan los segmentos S, R, los residuos, que son la lúnula y el triángulo, quedarán iguales: y como el quadrado OQ sea igual al triángulo APC, será tambien igual á la lúnula.

Esta es la célebre lúnula de Hipócrates Chîo, tan aplaudida por la antigüedad, cuya quadratura, aunque no infiere la del círculo, convence su posibilidad. Otras proposiciones omito por ser de mas curiosidad que provecho.

LI-

LIBRO VIII.

DE LA FÁBRICA Y USO DE ALGUNOS INSTRUMENTOS GEOMÉTRICOS.

LOs instrumentos Geométricos, cuya fábrica y uso se funda en los Teoremas de la Geometría, son de mucha utilidad para el exercicio de esta ciencia, por reducirse con ellos fácilmente á práctica lo que enseñó la teórica. Su número es casi sin número, pues apénas hay Autor que no les procure disponer con alguna novedad ajustada á sus ideas. Daré en este libro una sucinta declaracion de los mas familiares á los Geómetras. Quien desease en esta materia mayor extension, podrá recurrir al P. Gaspar Escoto en el *Organo Matemático*, en el *Pantómetro Kirkeriano*, y *Amusi Ferdinandea*.

CAPITULO I.

EXPLICASE LA FÁBRICA Y USO DE ALGUNOS instrumentos Geométricos.

PROPOSICION I.

Dase noticia de algunas medidas Geométricas.

COmo el fin de los instrumentos Geométricos sea el medir, será conveniente presuponer el conocimiento de algunas medidas, que comunmente son tantas y tan varias como los paises. Debe pues el Geómetra tener bien sabidas á lo ménos las de su patria, para proceder con acierto: y supuesto que las mas corrientes de los Reynos de España quedan explicadas en el *lib.* 1, *cap.* 2 de la *Aritmética*, explicaré en este lugar solamente las de los

Romanos, que juzgo será bastante para el intento presente; porque las reglas Geométricas de la misma suerte se exercitan con unas que con otras, y mas habiendo de tratar de este asunto en la Arquitectura Militar y Geografía.

La menor medida de los Romanos era la latitud de un grano de cebada: llámase *grano*. El *dedo* constaba de 4 granos juntos por los lados; pero ahora dividen el dedo en 12 partes iguales, á que llaman *líneas*. El *palmo menor* ó *quadrante* tenia quatro dedos: llamábase *menor*, á distincion del *mayor* ó *dodrante*, que era medio codo. El *pie* constaba de 4 palmos menores, y por consiguiente de 16 dedos. El pie Romano es el mismo que el Geométrico, y es igual al pie Valenciano, que es el tercio de la vara de Valencia, como demuestra Josef Vicente del Olmo en su *nueva descripcion del orbe*, *pag*. 92.

El *codo* constaba de pie y medio, y es media vara Valenciana. El *paso Geométrico* constaba de 5 pies: llamábase *mayor*, á distincion de otro paso menor, que llamaban *gressus*, y constaba de dos pies y medio. La *pértica* constaba de dos pasos ó 10 pies. El *estadio* de 125 pasos. La *milla* de 8 estadios ó mil pasos. Vea el curioso al Doctor Juan Bautista Corachan en su *Aritmética demonstrada*, que trata con erudicion esta materia.

PROPOSICION II.

Fábrica y uso de la escala ó pitipié Geométrico. (*fig*. 1.)

Ademas de compas y regla de que necesita el Geómetra, ha de tener la escala ó pitipié Geométrico, que se fabrica en esta forma. En una regla de alaton, ú otra materia firme y bien llana, tírese la recta AB paralela al lado de la regla, y que sea igual á un pie Geométrico: esta se dividirá en 12 partes iguales, que serán las uncias ó pólices: en la figura se halla un medio pie Valenciano ó Geométrico, que contiene 6 de las dichas partes. Tírese la otra recta CH paralela á la primera, y por ca-

cada division tírense las perpendiculares que tienen los números 100, 200, &c. y quedará todo el pie dividido en 1200 partes, de las quales las centésimas son actuales, y las intermedias potenciales, que se distinguirán en la forma siguiente.

Divídanse los lados AE, FH en 10 partes iguales, que se notarán con los números 10, 20, &c. tírense las transversales oblíqüas como se sigue: del punto E, principio de la division, tírese una línea á la primera parte: de la primera notada con el 10, tírese otra á la segunda, &c. Divídase asimismo AH, BC en 10 partes iguales, y tiradas las rectas paralelas á los lados, se pondrán los números 1, 2, 3 y los demas, como en la figura.

El uso de este pitipié es el siguiente. Se han de tomar 368 partes: búsquese arriba el número 8, y báxese por su línea hasta encontrar con la transversal oblíqüa, que tiene la nota 60, y se cortan en O: póngase en O el pie del compas, y extiéndase el otro hasta la transversal, que lleva la nota 300, que es en I; y la distancia OI será de 368 partes. Si se ofreciere haber de tomar mayor número de partes de las que tiene el pitipié, como 1824, se tomará todo el pitipié, que son 1200, y despues en la forma referida se tomarán las restantes 624, y juntas todas serán 1824.

ADVERTENCIA.

El medio pie de la estampa es algo menor de lo justo; porque el papel mojado se extiende regularmente una sexágesima parte; y en secándose, se encoge otra sexâgésima: con que el medio pie estampado con precision en el papel mojado, se reduce despues, y es una sexâgésima parte menor; y así será menester añadirle dicha porcion para que sea preciso; ó volverle á mojar como para la impresion, y apegarle en una tabla, con que se reducirá á su debida magnitud. Esto último es lo mas seguro, ya porque la extension del papel quando mojado, y la reduccion quando enjuto, no es uniforme en todo género de papel; ya tambien, porque mas se con-

trae por lo ancho del folio, que por lo largo; y esta es la causa por que un círculo estampado degenera en óvalo.

PROPOSICION III.

Fábrica y uso de la esquadra. (*fig.* 2.)

Compónese la esquadra de dos varas de alaton ú otra materia firme, que forman ángulo recto. Sirve para tirar líneas perpendiculares con brevedad, y exâminar los ángulos rectos: y poniéndole tres clavos, uno en el concurso A, y los otros en las extremidades B y C, sirve para determinar el punto en que las visuales terminadas á dos objetos forman el ángulo recto. Solo es menester advertir, que quando por los dichos clavos se miran los objetos, hemos de usar de dos líneas visuales, una que toque la parte diestra de los clavos A, B, y otra que toque la siniestra de A, C.

PROPOSICION IV.

Fábrica y uso de la regla magnética. (*fig.* 3.)

Hágase de alaton ú de otra materia firme, que no sea hierro, la varilla recta DE, con las dos pínulas E, D, á quien se ajustará la píxîde O, con su brúxula dentro, y el círculo se dividirá en 360 grados; y quedará fabricado el instrumento como se vé en la figura.

Sirve esta regla magnética para diferentes operaciones, singularmente para hacer una descripcion icnográfica de una Ciudad ó terreno; porque con ella se toman los ángulos horizontales y de posicion, que se forman con líneas paralelas al Horizonte en la forma siguiente. Importa saber el ángulo que se forma en el lugar A, con las dos líneas visuales AB, AC terminadas á dos baluartes, para conocer la distancia que tienen entre sí, ó la magnitud de la cortina.

Operacion. Mírese desde A por las pínulas el baluarte B; y supongamos que la saetilla de la brúxula señale

10

10 grados: conviértase la regla del mismo lugar A hácia C; y visto por las pínulas el baluarte C, señale la saetilla por exemplo 45 grados: réstese 10 de 45, y el residuo que son 35, será el valór del ángulo BAC. La razon es, porque como la brúxula siempre mire al polo del mundo, quantos grados se aparta la línea AC de AB, tantos se aparta la saetilla puesta en AC de los que señalaba en AB.

PROPOSICION V.

Fábrica y uso del báculo ó Cruz Geométrica. (*fig.* 4.)

Compónese este instrumento de dos palos HL, MN, bien derechos y de madera firme: el mayor puede tener de longitud quatro ó cinco pies Geométricos, el menor sea largo á discrecion, pero de tal suerte se ha de ajustar con el mayor, que pueda correr de L á H libremente, conservándose siempre perpendicular. Pondránse ademas de esto quatro clavos pequeños en H, M, L, N, para mirar por ellos con precision los objetos. La graduacion de este instrumento se executará como se sigue.

Tírese aparte la línea EF igual á OM mitad de MN: tírese su perpendicular FG: del punto E como centro, descríbase un quadrante de círculo dividido exâctamente en 90 grados, y si puede ser, cada grado se dividirá tambien por medio. Por estas divisiones se tirarán líneas ocultas del centro E, hasta que corten la línea HF: trasládense estas divisiones á la línea HL del instrumento, empezando del punto H con este órden, 75, 60, 45, &c. y quedará graduado el instrumento.

Válense comunmente de la Cruz Geométrica los Marineros para observar las alturas de las estrellas sobre el Horizonte: sirve juntamente para medir distancias y elevaciones, tomando los ángulos que forman las líneas visuales: su uso se entenderá en el exemplo siguiente. Supongamos, que observado un punto ó señal de un objeto por los puntos H, L, para observar al mismo tiempo otro señal por los puntos H, M, se haya de colocar el palo MN en el grado ó division 75. Diré, que en tal caso el án-

gu-

gulo MHL es 75 grados; y el ángulo MHN es 150 grados. La razon es, porque segun consta de la construccion, la línea O 75 es tangente de 15 grados: luego el ángulo M es de 15 grados; luego (32, 1 Euclíd.) el ángulo H será de 75 grados; y el ángulo MHN, por ser doblado del sobredicho, será de 150 grados.

PROPOSICION VI.

Fábrica y uso del quadrante y quadrado Geométrico. (*fig.* 5.)

La fábrica de este instrumento es la siguiente. Hágase de alaton ó madera un quadrado HF, que tenga á lo ménos un pie por lado: en qualquiera de sus ángulos como en E, se ha de ajustar una regla IL, que llaman *alidada*, de suerte, que pueda moverse libremente; y sea algo mas larga que la diagonal EG. Esta ha de tener dos dióptras ó pínulas, como tambien el lado EF: divídanse los dos lados FG, HG en 100 partes iguales, ó en 1000, conforme fuere capaz el instrumento; divídase asimismo la alidada IL en partes iguales á las de los lados, como se vé en la figura, y quedará preparado el instrumento. A uno de los lados divididos llaman comunmente *umbra recta*, y al otro *umbra versa*: nombres, que mas sirven de confusion, que de otro, y así no usarémos de ellos.

Dentro ó fuera del quadrado se suele describir un quadrante de círculo, dividido en 90 grados; y seria mejor, alargando la tabla, hacer todo el semicírculo; en el centro E se puede poner un hilo delgado con un plomo, que sirva de perpendículo.

El quadrado sirve para medir alturas y distancias; y el quadrante, para determinar y conocer los ángulos, como latamente verémos en el libro siguiente.

CA-

CAPITULO II.

EXPLÍCASE LA FÁBRICA Y USO DEL compas de proporcion ó Pantómetra.

PROPOSICION VII.

Explícase la fábrica de este instrumento. (*fig.* 6.)

HAganse de alaton, cobre ú otra materia semejante, dos líneas ó reglas paralelógramas, como se representan en la figura. Su longitud puede ser de un pie Geométrico; su latitud de tres dedos; y su crasicie moderada, para que no sea sobrado pesado el instrumento: estas han de ajustarse con gran primor de suerte, que puedan cerrarse y abrirse á modo de compas. Llámase este instrumento *Pantómetra*, que es lo mismo que medida universal; y *compas de proporcion*, por ser esta el fundamento total de su artificio. Muchas son las líneas que se pueden poner en la Pantómetra; pero las mas freqüentes y esenciales son la línea *Aritmética*, *Cordométrica*, *Geométrica*, *Estereométrica* y *Metálica*, cuya explicacion comprehenden las proposiciones siguientes.

PROPOSICION VIII.

Preparar la línea fundamental.

Llámase *línea fundamental*, la que sirve de fundamento y como pitipié para dividir las demas líneas de la Pantómetra. Tírese pues en una lámina ó tabla aparte, una línea recta, cuya longitud sea igual á la de la Pantómetra: divídase esta línea exáctísimamente en 100 ú en 1000 partes iguales, conforme la magnitud del instrumento; y si este fuere igual á la regla Geométrica, que expliqué en la *prop.* 2 de este libro, esta misma serviria de línea fundamental.

LÍNEA ARITMÉTICA.

Línea Aritmética, es la que dividida en partes iguales se inscribe en la Pantómetra; su fábrica y uso es como se sigue.

PROPOSICION IX.

Dividir la línea Aritmética, é inscribirla en la Pantómetra. (*fig.* 7.)

Tírense del centro de la Pantómetra, por toda la longitud de sus reglas, las líneas AB, AB, las quales se dividirán en 100, 120, 200 ó 1000 partes iguales, segun la capacidad del instrumento. Pónganse á las divisiones sus propios números, y el título *línea Aritmética*. Con esta línea se resolverán muchos problemas, como los siguientes.

PROPOSICION X.

Dividir una línea recta en qualesquiera partes. (*fig.* 7.)

Pídese, que la línea MN se divida en 100 partes iguales.

Operacion. Tómese con el compas la distancia MN: ábrase la Pantómetra de suerte, que puesto el un pie del compas en el punto 100, el otro se ajuste al 100 del otro lado: y conservando la Pantómetra en la misma disposicion, se tomará con el compas la distancia de 10 á 10, y esta será la décima parte de la recta MN: y tomando despues la que hay de 99 á 99, se notará con ella desde M el punto O, y será ON una centésima parte de la línea MN; y con esta se dividirá cada décima parte en 10 partes, y toda la línea en 100. Con esta práctica se formará un pitipié dividido en las partes que se quisieren.

Demonstracion. Por ser las líneas EE, FF paralelas, son (2, 6 Eucl.) proporcionales AF á AE, como FF á EE; siendo pues AF 99 partes de AE, será FF; esto es, MO 99 partes de EE ú de MN: luego ON es la centésima parte de MN.

PRO-

PROPOSICION XI.

Cortar de una recta dada qualesquiera partes. (*fig.* 7.)

De la recta MN se han de cortar 99 partes. Tómese como ántes la distancia MN, y ábrase la Pantómetra hasta que la dicha distancia se ajuste de 100 á 100. Tómese la distancia de 99 á 99, y pasándola de M á O, será MO 99 partes de MN. Consta de lo dicho.

PROPOSICION XII.

Dada una planta de un recinto, hacer otra semejante sobre una línea dada. (*fig.* 8.)

Dada la planta BE, se pide otra semejante sobre la recta FG, correspondiente á BA, y menor que ella.

Operacion. Tómese con el compas la BA: pásese á la Pantómetra sobre la línea Aritmética desde O hasta donde llegare, como por exemplo hasta M: tómese con el compas la GF, y abriendo la Pantómetra, ajústese dicha distancia de M á M; y sin variar la abertura, se hallarán las demas líneas como se sigue.

Quiero hallar la GH correspondiente á BC: tomo con el compas la BC, y la paso de O hasta N: tomo la distancia NN, y esta será la longitud de GH. De la misma suerte se hallarán las demas líneas; y disponiéndolas de suerte, que formen ángulos iguales á los de la planta dada, se habrá logrado el intento.

Ahora se le dará su proporcionado pitipié en la forma siguiente. Sáquese una quarta proporcional, (12, 6 Eucl.) como BA á GF, así el pitipié de la planta dada al que se busca; y esta quarta proporcional será el que se desea.

Si dada la planta BE, se pide otra sobre el lado ST mayor que su correspondiente BA, será mejor invertir la sobredicha operacion en esta forma. Tómese la ST, y pásese á la Pantómetra desde O sobre la línea Aritmética, y sea OM: tómese AB, y ajústese de M á M; y permaneciendo asi la Pantómetra, si se quiere hallar el lado SK correspondiente á BC, se tomará BC, y véase á qué puntos seme-

jan-

jantes se acomoda transversalmente, sea por exemplo de N á N: tómese pues la distancia ON, y esta será el lado SK, y así de las demas. Demuéstrase como la *prop.* 10.

PROPOSICION XIII.

Hallar una quarta proporcional á tres líneas dadas. (*fig.* 9.)

Sean dadas las tres líneas O, P, Q: búscase la quarta proporcional.

Operacion. Póngase con el compas la primera O desde C hasta M: aplíquese la segunda P transversalmente desde M á M, y la tercera Q desde C hasta N, y la NN será la quarta proporcional; porque (2, 6 Eucl.) es CM á MM, como CN á NN.

PROPOSICION XIV.

Hallar una tercera proporcional á dos rectas dadas. (*fig.* 10.)

Sean dadas dos rectas O, P, y se busca la tercera proporcional.

Operacion. Tómese con el compas la primera O, y pásese de C á N: tómese la segunda P, y abriendo la Pantómetra, pásese de N á N; y dexando la Pantómetra en el mismo estado, se pasará el mismo intervalo de la segunda de C á M, y MM será la tercera proporcional que se busca; porque (2, 6 Eucl.) CN á NN, es como CM ó NN á MM: luego como O á P, así P á MM.

PROPOSICION XV.

Hallar un número medio proporcional entre dos dados. (*fig.* 11.)

El modo de hallar una recta media proporcional entre dos dadas, es mucho mas trabajoso por la Pantómetra, que el ordinario que expliqué en el *lib.* 6 de la *Geom. Elem. prop.* 13, y así en su lugar doy el modo de hallar un número medio proporcional entre dos dados, como entre 48 y 12.

Operacion. Tírese á discrecion la recta FG, y ábrase arbitrariamente la Pantómetra: tómese en ella la distancia entre 48 y 48, y pásese desde G á I: tómese despues la dis-

distancia de 12 á 12 en la misma postura de la Pantómetra, y pásese desde I á F: descríbase sobre FG un semicírculo, y levántese la perpendicular IK; y tomándola con el compas, se hallará, que en la Pantómetra se ajusta transversalmente á 24 24: diré pues, que 24 es el medio proporcional entre 48 y 12. Consta de la proposicion citada.

Puédese por la Pantómetra hallar la raiz quadrada; pero en siendo los números algo crecidos, ó no sale exâcta, ó requiere mucho rodeo: y así omito este problema.

PROPOSICION XVI.

Dividir una recta, conforme lo está otra recta dada. (*fig.* 12.)

Pídese, que la recta OM se divida en N en la misma proporcion que HF está dividida en G.

Operacion. Búsquese (13) á las tres líneas HF, GF, MO una quarta proporcional MN, y quedará dividida la OM en N como se deseaba. Si la recta OM tuviere muchas divisiones, se repetirá esta misma operacion para cada division, como si fuere sola.

PROPOSICION XVII.

Dividir una recta dada en media y extrema razon.

Ténganse divididas en la Pantómetra las líneas Aritméticas en media y extrema razon, poniendo en la division este señal *: y con esto se dividirá qualquiera línea dada en dicha razon, de esta manera: Tómese con el compas la línea dada, y abriendo la Pantómetra, ajústense transversalmente á los últimos puntos: y tomando la distancia de * á *, se dividirá con ella la recta dada en media y extrema razon. La demonstracion es la misma de las proposiciones pasadas.

LINEA CORDOMETRICA.

Línea Cordométrica, es la que en sus divisiones contiene las cuerdas ó subtensas de todos los grados del semimicírculo ; y se suele poner en las Pantómetras con este título : *Linea Chordarum* ; á ella pertenecen los problemas siguientes.

PROPOSICION XVIII.

Dividir la línea Cordométrica, y colocarla en la Pantómetra. (fig. 13.)

Modo 1. Tírese aparte la línea GH igual á la línea AB, tirada del centro A de la Pantómetra en ambas varas. Divídase por medio en I, y con el semidiámetro IG hágase un semicírculo. Este se dividirá con gran precision en 180 gr. y del punto H se tirarán ó imaginarán las líneas HK, HL, &c. á los puntos de las divisiones; esto es, á cada grado ó á cada dos, conforme la capacidad del instrumento, que serán cuerdas de los arcos HK, HL, &c. Trasládense estas líneas á las AB, AB de la Pantómetra, empezando siempre del centro A. Póngase en cada division, si se puede, ó si no de 5 en 5 grados, el número de los que subtende cada cuerda en el semicírculo, y quedarán divididas las líneas Cordométricas.

Modo 2. Por las tablas de los senos que darémos en la Trigonometría. Tírense las líneas AB, AB iguales á la línea fundamental; y por exemplo, para señalar la cuerda de 10 grados, voy á la tabla de los senos, y busco el seno de 5 grados, mitad de 10, y omitiendo las últimas cifras de la mano derecha, hallo ser 87, y su duplo 174. Tomo pues de la línea fundamental 174 partes, y pásolas á la Pantómetra desde A hácia B en ambas líneas; y haciendo lo mismo en las demas divisiones, quedará inscrita la línea Cordométrica. Fúndase esto, en que el seno de un arco es la mitad de la cuerda del arco duplo, como en su lugar verémos.

PROPOSICION XIX.

Cortar de un círculo un arco de qualesquiera grados.

Pídese, que de un círculo dado se corten 40 grados.

Operacion. Tómese con el compas el radio del círculo dado, y abriendo la Pantómetra, ajústese dicho radio

trans-

transversalmente á los puntos 60, 60, y sin mover el instrumento, tómese la distancia que hay de 40 á 40, y esta será la cuerda de 40 grados del círculo dado. Demuéstrase como los problemas antecedentes.

PROPOSICION XX.

Conocer el valor de un arco dado.

Operacion. Tómese el radio del círculo, de quien es el arco dado, y ajústese en la Pantómetra de 60 á 60. Tómese con el compas el arco dado, y véase á qué puntos semejantes se ajusta transversalmente: si se ajusta de 40 á 40, el arco propuesto será de 40 grados; y así en los demas.

PROPOSICION XXI.

Dado un arco y su valor, hallar el radio.

Sea dado un arco de 40 grados: búscase el radio de su círculo.

Operacion. Tómese dicho arco con el compas, y ajústese en la Pantómetra de 40 á 40. Tómese la distancia de 60 á 60, y esta será el radio que se busca.

PROPOSICION XXII.

Inscribir en un círculo qualquiera polígono regular.

Operacion. Tómese con el compas el radio del círculo en quien se ha de inscribir el polígono, y abriendo la Pantómetra, ajústese á los puntos 60, 60. Véase despues quántos grados subtende el lado del polígono que se quiere inscribir, como si es el pentágono, será el 72, si el octágono 45, &c. Estos se buscarán en la línea Cordométrica; y perseverando la Pantómetra en la misma abertura, se tomarán transversalmente los dichos grados, y pasándoles al círculo, será dicha distancia el lado del polígono que se desea.

Para hallar los grados que subtende el lado de qualquiera polígono, se partirán 360 por el número de sus lados, y el quociente será los grados que se buscan. Algunos añaden

den á la Pantómetra la *Línea Poligonográfica*, la qual omito por resolver todos sus problemas la Cordométrica, casi con igual facilidad.

PROPOSICION XXIII.

Dado el lado de qualquier polígono regular, hallar el radio.

Dado un pentágono, se busca el radio del círculo que le circunscribe.

Operacion. Tómese su lado con el compas, y ábrase la Pantómetra, hasta que dicha distancia se ajuste de 72 á 72, que son los grados que subtende el lado del pentágono: tómese la distancia de 60 á 60, y este será el radio que se pide.

PROPOSICION XXIV.

Investigar el ángulo que comprehenden las líneas Cordométricas de la Pantómetra en qualquier abertura.

Tómese con el compas el intervalo que hay de 60 á 60 en las líneas Cordométricas, y pásese desde el centro sobre qualquiera de las dichas líneas; y la extremidad de este intervalo dará el valor del ángulo que forman las dichas líneas en la abertura dada. Por este medio se resuelven varios problemas Astronómicos y Geométricos; pero es menester añadir al instrumento dos pínulas en cada línea Cordométrica.

LÍNEA GEOMÉTRICA.

Línea Geométrica, es la que sirve para aumentar ó disminuir en qualquiera proporcion las figuras planas. Otros la llaman *Línea Planométrica*, otros *Línea Quadrática*. Su fábrica y uso comprehenden las proposiciones siguientes.

PROPOSICION XXV.

Dividir la línea Geométrica é inscribirla en la Pantómetra. (*fig.* 14.)

Modo 1. Tiradas en el instrumento del centro por toda su longitud dos líneas, se tirará aparte la recta AN igual

igual á qualquiera de ellas. Esta se dividirá en 10 partes iguales: levántese AC perpendicular é igual á AD. Tómese la distancia CD, y pásese de A hasta P. Tómese CP, y transfiérase de A hasta Q. Tómese CQ, y pásese de A hasta E; y continuando de la misma suerte con gran cuidado, quedará dividida la línea como se desea. Estas divisiones se pasarán á las líneas Geométricas de la Pantómetra, comenzando siempre del centro ó concurso de ellas, y quedará perfecta la obra. A la primera division, baxando del centro, se escribirá 1, á la segunda 2, á la tercera 3, &c. Si la operacion está bien hecha, la línea del quadrado quarto caerá sobre el punto E de la division primera, la del nono sobre F, la del décimosexto sobre G, y por esta causa se hacen las 10 divisiones iguales de la línea AN. Fúndase esta práctica en la *prop.* 47 *lib.* 1 de la *Geom. Elem.*

Modo 2. Háganse las líneas de la Pantómetra iguales á la línea fundamental, y divididas en 10 partes iguales como ántes, se escogerá por primer quadrado el número 10000. Sáquese su raiz quadradá, que es 100. Tómense 100 partes de la línea fundamental, y pásense del centro de la Pantómetra sobre sus líneas, y este será el lado del primer quadrado. Duplíquese el número que se escogió, y en nuestro exemplo será 20000: sáquese su raiz quadradá, que es 141, y tomando 141 partes de la línea fundamental, se pasarán á la Pantómetra desde su centro; y este será el lado del segundo quadrado, y así en los demas, tomando para el tercero 30000, y para el quarto 40000, &c. y sacando sus raices. Conoceráse si va precisa la operacion, si los lados de los quadrados quarto, nono, décimosexto, &c. caen sobre las divisiones iguales que se hicieron al principio.

PROPOSICION XXVI.

Aumentar ó disminuir una figura dada en qualquiera proporcion. (*fig.* 15.)

Sea dado el triángulo ABC: pídese otro su semejante, que tenga con él razon sesquiáltera.

Ope-

Operacion. Tómense qualesquiera números en razon sesquiáltera, como 12 y 8. Tómese con el compas la línea AB; y abriendo la Pantómetra, ajústese transversalmente á los puntos 8, 8 de la línea Geométrica; y sin mover el instrumento, tómese el intervalo 12, 12, y sea DE, y el triángulo hecho semejantemente sobre DE, será sesquiáltero de ABC; y así en las demas figuras.

Demonstracion. De la construccion de las líneas Geométricas consta, que el quadrado ó qualquiera rectilíneo hecho sobre O 8 al hecho semejantemente sobre O 12, se ha como 8 á 12. Y siendo (2, 6 Eucl.) la línea 12, 12 á la línea 8, 8, como O 12 á O 8, el rectilíneo hecho sobre 12, 12, ú DE á su semejante hecho sobre 8, 8, ó AB, tendrá la razon misma de 12 á 8.

PROPOSICION XXVII.

Hallar la razon que tienen qualesquiera figuras semejantes. (*fig.* 16.)

Sean dados los quadrados H y I, y se busca la proporcion que tienen entre sí.

Operacion. Tómese con el compas la línea KL, y abriendo la Pantómetra, se aplicará dicha línea transversalmente á qualquiera punto de las líneas Geométricas, como por exemplo á 20, 20. Tómese despues FG, y sin mover la Pantómetra, véase á qué puntos se ajusta, y sea por exemplo á 10, 10. Y se dirá, que el quadrado I al quadrado H, tiene la razon que hay de 20 á 10 que es dupla; y así de los demas. Si la FG no se ajustare á ningun punto, se aplicará la distancia KL á otro punto, hasta que ambas se ajusten á algunos de los allí notados. La demonstracion es la misma que la antecedente.

PROPOSICION XXVIII.

Dadas muchas figuras semejantes, hacer otra semejante é igual á todas juntas. (*fig.* 17.)

Sean dadas tres figuras semejantes, cuyos lados homólogos ó diámetros (si fueren círculos) sean las líneas

A,

A, B, C. Pídese una figura que sea igual á todas.

Operacion. Tómese con el compas la largaria de la línea C, y abierta la Pantómetra, aplíquese á qualquiera número de la línea Geométrica, como por exemplo á 12, 12, y dexándola en la misma postura, tómese la línea B, y véase á qué puntos se ajusta, y sea á 9, 9; y porque 12 y 9 son 21, guárdese este número en la memoria: tómese despues la línea A, y véase á qué puntos se ajusta, y sea á 6, 6: junto 6 con 21, y hace 27: tómese pues la distancia 27, 27, y será la línea D, y la figura hecha sobre D será igual á las propuestas. Consta de la construccion de las líneas Geométricas.

PROPOSICION XXIX.

Propuestas dos figuras semejantes y desiguales, hallar otra semejante, que sea igual á la diferencia de las propuestas. (*fig.* 18.)

Dados dos círculos desiguales, el uno del diámetro AA, y el otro de BB, se busca el diámetro de un círculo que sea igual á la diferencia de los círculos dados.

Operacion. Tómese el diámetro mayor AA, y aplíquese transversalmente á qualesquiera puntos de las líneas Geométricas, y sean 20, 20, y sin mover la Pantómetra, tómese BB, y véase á qué puntos se ajusta en las mismas líneas, y sean 8, 8: réstese 8 de 20, y quedarán 12: tómese la distancia 12, 12, y esta será el diámetro que se busca: hágase CC igual á la dicha distancia, y el círculo que tuviere este diámetro CC, será igual á la diferencia de los círculos dados, la qual es el anillo comprehendido entre los círculos AA, BB.

LINEA ESTEREOMÉTRICA.

Llámase *línea Estereométrica*, la que sirve para aumentar ó disminuir en qualquiera proporcion los sólidos semejantes.

PROPOSICION XXX.

Dividir la línea Estereométrica, é inscribirla en la Pantómetra.

Operacion. Dividida en 1000 partes la línea fundamental,

tal, igual á la longitud de la Pantómetra, se entrará en la siguiente Tabla, y para lado del primer cubo se hallarán en la segunda coluna 200: tómense 200 partes de la línea fundamental, y pónganse en la Pantómetra desde su centro. Asimismo para lado del segundo cubo se hallan 252, y tomados de la línea fundamental, se pasarán como ántes á la Pantómetra: de esta suerte se proseguirá hasta colocar 125 cubos, y quedarán divididas las líneas Estereométricas.

TABLA DE LOS LADOS DE LOS CUBOS ó raices cúbicas.

1	200	26	592	51	742
2	252	27	600	52	746
3	288	28	607	53	750
4	317	29	614	54	753
5	342	30	621	55	756
6	363	31	628	56	760
7	382	32	635	57	765
8	400	33	641	58	770
9	416	34	648	59	774
10	431	35	654	60	778
11	445	36	660	61	782
12	458	37	666	64	800
13	470	38	672	65	804
14	482	39	678	70	824
15	492	40	684	75	842
16	504	41	690	80	862
17	514	42	695	85	880
18	524	43	701	90	896
19	534	44	706	95	912
20	543	45	711	100	928
21	552	46	717	105	943
22	560	47	722	110	958
23	569	48	727	115	962
24	577	49	732	120	968
25	585	50	737	125	1000

PRO-

PROPOSICION XXXI.

Sacar la raiz cúbica por las líneas Estereométricas. (*fig.* 19.)

Por estas líneas solo se puede sacar la raiz cúbica de aquellos números, que quitándoles tres cifras á la derecha, lo que queda no excede al último número de dichas líneas. Pídese pues la raiz cúbica de 16000.

Operacion. Tómense de la línea Aritmética con el compas 20 partes, y abriendo la Pantómetra, aplíquese esta distancia transversalmente á los puntos 8, 8 de las líneas Estereométricas; y sin abrir ni cerrar la Pantómetra, tómese la distancia que hay entre 16 y 16 que es el número dado, quitadas las tres cifras de la derecha: aplíquese esta distancia sobre la línea Aritmética desde el centro, y se hallará comprehender 25 partes, y esta será la raiz cúbica próxîma del número dado.

Demonstracion. (26) La misma razon hay de NO á PQ, que de MN á MP: luego la misma razon hay del cubo de NO al cubo de PQ, que hay del cubo de MN al de MP; el cubo de NM, que es el octavo, es subduplo del cubo de MP, que es el décimosexto: luego el cubo de NO, que es 8; esto es, 8000 por la operacion, es subduplo del cubo de PQ: luego PQ es raiz próxîma del cubo duplo de 8000; esto es, será raiz próxîma de 16000 número dado. La razon por que se toma de la línea Aritmética 20 mas que otro número, es porque en la division de las líneas, es 20 el primer lado cúbico, y 8 ú 8000 el primer cubo.

PROPOSICION XXXII.

Hallar dos medias proporcionales entre dos líneas dadas. (*fig.* 20.)

Dadas las líneas A y D, que sean por exemplo A 108 y D 32, se desean dos medias proporcionales.

Operacion. Tómese con el compas la línea A, y abierta la Pantómetra, acomódese entre los puntos 108, 108, y sin mover el instrumento, tómese la distancia de 32 á 32, y esta será la segunda proporcional B. Aplíquese la línea B de 108 á 108, y tomando segunda vez la distancia de 32 á 32, será esta la tercera proporcional C. Si las halladas B y C se aplican con el compas al mismo pitiplé con que se midiéron A y D, se hallará ser B 72, y C 48. La demonstracion omito, por poderse colegir de las *propos.* 13 *y* 14.

PROPOSICION XXXIII.

Aumentar ó disminuir qualquiera sólido en una proporcion dada, por las líneas Estereométricas. (*fig.* 21.)

Sea dado el globo AB: pídese otro tres veces mayor.

Operacion. Escójanse qualesquiera dos números en razon tripla, como 10 y 30: tómese con el compas el diámetro AB, y ajústese á los puntos 10 y 10 de la Pantómetra en las líneas Estereométricas; y sin mover el instrumento, tómese la distancia 30, 30 en las mismas líneas, y esta será el diámetro CD del globo tres veces mayor que el dado AB. Si el diámetro AB se diere en números, como si fuese de 8 palmos, se tomará el número 8 de la línea Aritmética, y se colocará entre 10 y 10 como ántes en las líneas Estereométricas; y tomando la distancia de 30 en las mismas líneas, será esta el diámetro del globo que se busca, la qual puesta desde el centro sobre la línea Aritmética, dará los palmos que se le han de dar á dicho diámetro.

De la misma suerte se duplicará, triplicará, &c. el cubo y qualquiera otro sólido, haciendo con el lado lo que hemos hecho con el diámetro; y si tuviere lados desiguales, se repetirá en cada lado la misma operacion.

Demonstracion. Por la construccion de las líneas Estereométricas, M 30 es el lado del sólido, que con el sólido semejante hecho de M 10, tiene la razon de 30 á 10, y como (2, 6 Eucl.) la línea 30, 30 á la línea 10, 10 tenga la misma razon que M 30 á M 10, será tambien el sólido hecho de la línea 30, 30 triplo del que se formare de la línea 10, 10 como se deseaba.

PRO-

PROPOSICION XXXIV.

Dados diferentes sólidos semejantes, hacer otro que sea igual á todos los que se propusieron. (*fig.* 21.)

Sean dados los globos AB, CD. Pídese otro, que sea igual á los dos juntos.

Operacion. Tómese con el compas el diámetro AB, y aplíquese transversalmente á qualesquiera puntos iguales de las líneas Estereométricas, como por exemplo á 10, 10. Y sin mover el instrumento, tómese el diámetro CD, y véase á qué puntos iguales de las mismas líneas se ajusta, y sean 30, 30. Súmense 30 con 10, que es el punto antecedente, y serán 40. Tómese la distancia 40, 40, y sea OP, y este será el diámetro de un globo igual á los dos AB y CD. De la misma suerte se obrará, aunque sean los globos ó sólidos tres ó quatro, &c. Y si los diámetros ó lados se dieren en números, se tomarán estos de la línea Aritmética, y y con estas distancias se harán las mismas operaciones.

Demonstracion. De la construccion de las líneas Estereométricas consta, que el globo ó sólido segundo, que es el que tiene por diámetro ó lado la distancia del centro de la Pantómetra hasta el 2, es doblado del primero; y el tercero por la misma razon es triplo del primero: luego es igual al segundo y primero, y así de los demas: luego el sólido ó globo hecho de M 40, es igual á los que se hicieron de M 10 y M 30. Siendo pues (2, 6 Eucl.) proporcionales M 40, M 30 y M 10 con 40, 40, 30, 30 y 10, 10, será el globo OP, cuyo diámetro es 40, 40, igual á los globos CD y AB hechos de 30, 30 y de 10, 10.

PROPOSICION XXXV.

Hallar la proporcion de los sólidos semejantes. (*fig.* 21.)

Sean dados los globos AB, CD. Pídese, qué proporcion tenga el mayor con el menor.

Operacion. Tómese con el compas el diámetro AB, y ajústese á qualesquiera puntos semejantes de las líneas Este-

te-

tereométricas, como por exemplo á 10, 10. Tómese el diámetro CD, y véase sin mover nada, á qué puntos semejantes se ajusta, y sean 30, 30. Digo que el globo CD al globo AB tiene la razon de 30 á 10, que es tripla. Consta de lo dicho.

LÍNEA METÁLICA.

Líneas metálicas en la Pantómetra, son las que expresan las proporciones que tienen los metales entre sí, tanto en quanto al peso, suponiéndoles de una misma magnitud, como en quanto á la magnitud, suponiéndoles de igual peso. Van señaladas con los caracteres de los siete Planetas con que se suelen señalar los metales: el del Sol significa el oro: el de la Luna la plata: Saturno denota el plomo: Júpiter el estaño: Marte el hierro: Vénus el cobre: y Mercurio el azogue.

PROPOSICION XXXVI.

Dividir la línea metálica, é inscribirla en la Pantómetra.

Para la inscripcion y division de estas líneas, supongo lo que mas latamente dirémos en la Estática, que los globos, cubos, &c. de diferentes metales, si tienen igual peso, tienen desigual magnitud; y si tienen igual magnitud, tienen desigual peso: de tal manera, que la razon de las magnitudes quando tienen igual peso, es recíproca con la razon de los pesos quando tienen iguales magnitudes; como por exemplo, porque el peso de un globo de oro es doblado del peso de un globo de cobre de igual magnitud, la magnitud de un globo de cobre es doblada de la magnitud de un globo de oro de igual peso.

De aquí se infiere, que para señalar en las líneas metálicas los diámetros de los globos de diferentes metales tomados en igual peso, es menester saber la proporcion que tienen en quanto al peso los metales tomados en igual magnitud; porque de aquí se inferirá quál sea la proporcion de sus magnitudes quando tienen igual peso: requisito esencial para determinar en la Pantómetra sus diámetros. Todo esto comprehenden las Tablas siguientes, fundadas

das en las experiencias mas diligentes del P. Mersenno y otros Autores.

TABLA I DE LA PROPORCION DEL PESO de los metales tomados en igual magnitud.

	Azogue		$71\frac{1}{2}$
	Plomo		$60\frac{1}{2}$
	Plata		$54\frac{1}{2}$
	Cobre		$47\frac{1}{3}$
El Oro al	Alaton	es como 100 á	45
	Hierro		42
	Estaño comun		39
	Piedra comun		14
	Pólvora comun		$5\frac{1}{4}$

TABLA II DE LOS DIAMETROS DE LOS globos Equiponderantes de diferentes metales expresados en partes iguales.

Oro	500	Alaton	652
Azogue	559	Hierro	668
Plomo	592	Estaño comun	684
Plata	615	Piedra	963
Cobre	643		

De dos maneras se puede executar la division de las líneas metálicas; ó por la Tabla primera, valiéndose de la línea Estereométrica, ó por la Tabla segunda, y mediante la línea Aritmética ó fundamental.

Modo 1. Tírense del centro de la Pantómetra dos líneas: córtense estas á discrecion, y el segmento de la parte del centro se supondrá ser el diámetro de un globo de oro, y á la division se pondrá el señal del oro. Hecho esto, se señalarán los diámetros de los globos de los demas metales, tomados en igual peso, en esta forma. Porque en la Tabla I el peso del oro al de azogue, es como 100 á $71\frac{1}{2}$, tómese con el compas el diámetro que se señaló para el oro; y abriendo la Pantómetra, póngase transversalmenmente en las líneas Estereométricas de 71 á 71, no haciendo caso del quebrado; y sin abrir ni cerrar la Pantómetra, tómese la distancia que hay de 100 á 100, y pasándola desde el centro sobre las líneas metálicas, quedará señalado el diámetro del globo de azogue de igual peso con el oro; y á las divisiones se pondrá el señal del azogue. De la misma suerte se pondrá el diámetro de plomo. El oro al plomo, segun la Tabla, es como 100 á 60 $\frac{1}{2}$. Tómese pues el diámetro del oro, y ajústese de á 60 en las líneas Estereométricas; y tomando la distancia de 100 á 100, se pasará sobre las líneas metálicas desde el centro, y á la division se pondrá el señal del plomo; y así en las demas.

Demonstr. El peso del oro al del plomo de igual magnitud, es como 100 á 60: luego siendo recíprocas las magnitudes y los pesos, será la magnitud del globo de plomo á la del globo de oro, como 100 á 60; esto es, como el cubo centésimo al cubo sexâgésimo: luego el diámetro del plomo al del oro será como el lado del cubo centésimo al lado del sexâgésimo; esto es, (*fig.* 22.) como M 100 á M 60, y por consiguiente (2, 6 Eucl.) como 100, 100 á 60, 60: luego la línea 100, 100 es el diámetro del globo de plomo, y 60, 60 la del oro de un mismo peso.

Modo 2. Tómense de la línea fundamental ú de la Aritmética las partes que para el diámetro de cada metal señala la Tabla II, y pasándolas del centro de la Pantómetra sobre las líneas, quedarán divididas como se desea. La razon de esta division es la misma que la antecedente.

PROPOSICION XXXVII.

Dado el diámetro de un globo ó el lado de un cubo de qualquier metal, hallar el diámetro del globo ó lado del cubo de otro metal de igual peso con el primero.

Sea por exemplo la línea A diámetro de un globo de plomo. Búscase el diámetro de un globo de oro de igual peso con el plomo.

Operacion. Tómese con el compas la línea A dada, y aplíquese al señal del plomo de entrambas varas de la Pantómemetra transversalmente ; y la distancia que hay de oro á oro será diámetro de la bola de oro de igual peso ; y así en los demas metales. Consta de lo dicho.

PROPOSICION XXXVIII.

Hallar la proporcion que hay de unos metales á otros, en quanto al peso.

Pídese por exemplo, qué proporcion guardan el oro y la plata entre sí en quanto al peso, tomados en igual magnitud.

Operacion. Tómese en la línea metálica la distancia que hay del centro al punto ó señal de la plata, y abriendo la Pantómetra, aplíquese la sobredicha distancia transversalmente á qualesquiera puntos de la línea Estereométrica, por exemplo á 100, 100, y sin abrir ni cerrar el instrumento, tómese la distancia que hay del centro al señal del oro, y búsquese á qué puntos semejantes de las líneas Estereométricas se ajusta, y sea por exemplo á 54 $\frac{1}{2}$ y 54 $\frac{1}{2}$. Digo pues, que el peso del oro al de la plata, es como 100 á 54 $\frac{1}{2}$. La razon consta de lo dicho.

De aquí se colige el modo de resolver la qüestion siguiente y sus semejantes. Hay una estátua de piedra comun ; quiérese fabricar otra semejante y de la misma grandeza, que sea de plata : búscase quántas libras de plata serán menester.

Operacion. Pésese la estátua de piedra, y sea su peso 20 libras. Tómese la distancia que hay del centro de la Pantómetra al punto *plata*, y abriendo la Pantómetra, aplíquese esta distancia á los puntos 20, 20 de las líneas Estereométricas ; y sin mover el instrumento, tómese la distancia del centro al punto *piedra*, y véase á qué puntos de las líneas Estereométricas se ajusta transversalmente, y sea por exemplo á 96, 96. Digo que 96 libras de plata serán menester para fabricar dicha estátua.

PRO-

PROPOSICION XXXIX.

Dados dos lados de dos sólidos semejantes de diferente materia, hallar la razon que tienen entre sí en quanto al peso. (*fig.* 22.)

Sea la línea A diámetro de una bola de cobre, y la línea B diámetro de otra bola de hierro: búscase la razon de sus pesos.

Operacion. Tómese con el compas la línea A; y abierta la Pantómetra, aplíquese á los puntos del cobre, y sin moverla tómese la distancia transversal del hierro, y sea por exemplo la línea X. Si esta fuese igual á la línea B, diriamos que ambos sólidos A y B eran de igual peso; pero siendo la X desigual á B, y siendo diámetro de una bola de hierro de igual peso al de la bola A, no hay duda que la misma proporcion en quanto al peso hay de la bola A á la bola B, que de la bola X á la misma bola B: y porque X y B son de una misma materia, hallarémos la proporcion que tienen en quanto al peso y magnitud (que es una misma, por ser de una misma materia) valiéndonos (35) de las líneas Estereométricas; esto es, se tomará la línea X, y se aplicará transversalmente á qualesquiera puntos semejantes, y sea á los 60, 60. Véase despues á qué puntos se ajusta la línea B, y sea por exemplo á 20, 20, y dirémos, que la bola X á la bola B, es en quanto al peso y magnitud como 60 á 20; y siendo la bola A del mismo peso que X, será la bola A de cobre en quanto al peso, á la bola B de hierro, como 60 á 20, que es razon tripla.

PROPOSICION XL.

Dado el diámetro y peso de una bola, hallar la grandeza de otra bola de diferente materia y de un peso determinado. (*fig.* 22.)

Sea dada la línea X, diámetro de una bola de piedra,

dra, cuyo peso es 7 libras. Pídese el diámetro de una bola de plomo, que pese 20 libras.

Operacion. Ajústese transversalmente el diámetro X á los puntos *Pied*, *Pied*: tómese, sin mover la Pantómetra, la distancia transversal del plomo, y esta será, como consta de lo dicho, el diámetro de una bola de plomo de 7 libras; y porque se pide ha de pesar 20 libras, aplíquese transversalmente el diámetro X á los puntos 7, 7 de las líneas Estereométricas; y tomando la distancia 20, 20, esta será el diámetro de la bola de plomo de 20 libras. Consta todo de la misma construccion de las líneas.

PROPOSICION XLI.

Usar de estas líneas como de calibre universal para la Artillería.

Calibre, es una vara de alaton, en que están señalados los diámetros de las balas, tanto de plomo, como de hierro y piedra, desde el peso de 1 libra hasta 100. Es uno de los principales instrumentos que ha menester un Artillero; pero como la variedad de los pesos y cantidad de la libra sea tanta como hay Repúblicas en el mundo, se sigue, que el calibre fabricado segun una cantidad de libra, no se puede adaptar á las libras de otras Naciones. Este inconveniente evita la Pantómetra, que puede servir de calibre universal, obrando como en el exemplo siguiente.

Supongamos, que un Artillero se halle en Lisboa sin el calibre ajustado á la libra de aquella Ciudad, y se le ofrece exâminar el calibo de un cañon, y determinar de quántas libras de Lisboa sea la bala de hierro, plomo ú piedra que requiere la dicha pieza. Tome pues el diámetro de una bala de qualquiera de las dichas materias y de qualquier peso que sea. Supongamos sea el diámetro de una bala de hierro de 10 libras, que notará en un lado de la Pantómetra con dos puntos: hecho esto, tomará con el compas dicho diámetro, y le ajustará á los puntos 10, 10 de las líneas Estereométricas; y la Pantó-

me-

metra con esta abertura será el calibre que se desea: porque tomando el diámetro de la boca de la pieza, y viendo á qué puntos de las mismas líneas se ajusta transversalmente, se sabrá el peso de su propia bala de hierro: como si se ajusta á 15, 15, será su bala de 15 libras.

Otras muchas líneas se pueden inscribir en la Pantómetra, como las *Armónicas* para la Música, las *Militares* para la Fortificacion, que sè explicarán en su lugar.

LI-

LIBRO IX.

DE LA DIMENSION DE LAS LÍNEAS.

OCúpase la Geometría en medir la quantidad continua; y por tener esta tres especies, *línea*, *superficie* y *cuerpo*, suele aquella dividirse en *Longimetría*, que mide las líneas: *Planometría*, que mide las superficies planas: y *Estereometría*, que mide los sólidos ó cuerpos. De la primera trataré en este libro; de las demas en los siguientes.

Pero ántes conviene advertir, que las líneas se miden con líneas, las superficies con superficies, y los sólidos con sólidos: como (*fig.* 1.) la línea IH es medida de la línea IA; y siendo IH de un palmo, será IA de 6 palmos. Pero la medida del plano ó superficie CA es el quadrado IP, que siendo IH un palmo, será IP un palmo quadrado; y dirémos, que la superficie CA consta de 18 palmos quadrados. Asimismo la medida de los sólidos es un cubo, como un palmo cúbico ó pie cúbico, &c. La razon de haber escogido el quadrado para medida de los planos, y el cubo para los sólidos, es ademas de la uniformidad de sus ángulos y lados, lo mucho que facilitan las operaciones.

Las seis primeras proposiciones de este libro contienen algunas prácticas, de que freqüentemente necesitará el Geómetra; y aunque se podian inferir de lo dicho, juzgo será conveniente explicarlas aquí ántes de entrar en la dimension de las líneas.

PRO-

PROPOSICION I.

Conocido un lado y dos ángulos de un triángulo, hallar los otros lados. (*fig.* 2.)

Supongamos, que en la campaña tengo conocida la línea ó distancia AB 100 varas, y los ángulos A 70 grados, y B 60 grados, y me importa saber las distancias AC, BC.

Operacion. Tomo de un pitipié 100 partes, por las 100 varas de la línea AB, y con esta distancia determino la línea DE en un papel: hago (23, 1 Eucl.) el ángulo D igual á A, y el ángulo E igual á B, y quedará formado el triángulo DFE equiángulo á ACB; y (4, 6 Eucl.) los lados del uno serán proporcionales á los del otro. Tómense pues con el compas las líneas DF, EF, y véase quántas partes comprehenden del mismo pitipié, y tantas varas tendrán las líneas AC, BC.

PRO POSICION II

Conocidos los lados y un ángulo de un triángulo, hallar el otro lado y los demas ángulos. (*fig.* 2.)

Sea el triángulo ABC formado en la campaña, y sean conocidos sus dos lados; es á saber, AB de 100 varas, y AC de 80, y el ángulo A sea 70 grados, y quiero conocer el lado ó distancia CB y los ángulos B y C.

Operacion. Hágase en un papel el ángulo D de 70 grados: dénsele á la línea DE 100 partes de pitipié, y á la DF 80. Tírese la FE, y tomándola con el compas, y aplicándola al pitipié, se verá quántas partes comprehende, y de tantas partes constará la CB. Véase tambien en un quadrante graduado quántos arcos incluyen los arcos que miden los ángulos F y E, y esos serán los que comprehenden á los C y B. La razon es, por ser entrambos triángulos semejantes.

Si conocidos los lados AB 100 y AC 80, se conoce solamente el ángulo C, se obrará como se sigue. Hágase en un pa-

papel el ángulo F igual á C: dense á la línea FD 80 partes del pitipié, tantas quantas varas tiene AC: tómense con el compas 100 partes del pitipié, por tener AB 100 varas; y con esta distancia hágase un arco desde D, que corte á la línea FE, y tirando la DE, quedará formado el triángulo DFE semejante á ACB; y aplicando la FE al pitipié, se sabrá quántas partes incluye, y tantas varas tendrá la longitud CB. Los ángulos se sabrán, como en el caso precedente.

PROPOSICION III.

Conocidos los tres lados de un triángulo, hallar el valor de sus ángulos. (*fig.* 2.)

En el triángulo ABC se suponen conocidos sus tres lados AB 100 varas, AC 80, BC 90, y se buscan los ángulos.

Operacion. Fórmese el triángulo DEF semejante al dado, en esta forma: Dénsele á la línea DE 100 partes del pitipié, y tomando 80 partes del pitipié, se hará desde D el arco F: y tomando 90 partes del mismo pitipié, se hará desde E otro arco, que cortará al primero en F, y quedará formado el triángulo DFE semejante al dado, y por consiguiente equiángulo. Mídanse pues por el quadrante los ángulos D, F, E, y se sabrán los otros A, B, C.

PROPOSICION IV.

Formar en un papel un ángulo igual á otro formado en la tierra ó en el ayre; y al contrario. (*fig.* 3.)

Pídese, que el ángulo GHI formado en el suelo, se traslade en un papel.

Modo 1. Póngase el centro del semicírculo en H, y mírese por las pínulas fixas en su diámetro el punto ó señal G: y volviendo la alidada, atiéndase por sus pínulas el punto ó señal I, y esta señalará en la periferia los grados ó valor del ángulo H, á que se formará otro igual en el papel, como en otras partes se ha dicho.

Modo 2. Cuéntense en las líneas HG, HI los palmos que se quieran, puestas (si fuere menester) unas estacas en

los

los puntos H, G, I. Véase quántos palmos hay en GI, y serán conocidos los tres lados del triángulo GHI. Hágase (por la antecedente) en un papel el triángulo KLM, y el valor del ángulo L será el mismo que el del ángulo H.

De la misma suerte se formará en el suelo el ángulo H igual al ángulo L, formando allí el triángulo GHI semejante á KLM, contando en cada línea tantos palmos, quantas partes del pitipié incluyen los lados de KLM. Fúndase en la *prop*. 4 *lib*. 6 de Eucl.

PROPOSICION V.

Medir los ángulos entrantes y salientes de los edificios, y trasladarles al papel. (*fig*. 4.)

1 Pídese se mida el ángulo entrante MKL, que forman dos paredes.

Operacion. Tírense las líneas LM, LK en el llano de las paredes y á nivel con el Horizonte; cuéntense en ellas los palmos que se quisieren: véase quántos palmos tiene la MK, y con esto se sabrán los tres lados del triángulo LMK. Hágase en un papel (3) otro triángulo semejante, y quedará conocido el ángulo entrante L.

2 Se ha de medir el ángulo saliente N, que forman dos muros.

Operacion. Aplíquense á dichos muros dos varas rectas á nivel con el Horizonte, que se crucen, como se vé en la figura: mídase la distancia OP de sus extremidades y las porciones ON, PN; y con esto se hará (3) sobre un papel un triángulo semejante á ONP; y quedará conocido el ángulo ONP, que (15, 1 Eucl.) es igual al ángulo saliente su vertical opuesto.

PROPOSICION VI.

De un punto dado en una línea tirada en el suelo, sacar una perpendicular. (*fig*. 5.)

Puédese esto executar con la esquadra, como todos saben, y asimismo con el semicírculo, ajustando su centro al punto dado, y el diámetro á la línea, y poniendo la ali-

alidada á los 90 grados; pero si el Geómetra careciese de dichos instrumentos, obrará como se sigue. Del punto A dado en la línea, se cortarán á entrambas partes los segmentos iguales AM, AN, y tomando un hilo largo á discrecion, se doblará ajustando sus cabos, para tenerle dividido por medio, y aplicando los cabos á los puntos M, N, se extenderá de suerte, que formará con la línea el triángulo MON Isósceles: tírese la OA, y será perpendicular. (*corol.* 2 de la *propos.* 5 Eucl.)

Si se pidiere, que la perpendicular salga del punto S extremo de la línea, y esta no se pudiere alargar, se doblará el hilo como ántes, y ajustados sus cabos al punto S de la línea y al punto P tomado á discrecion, extendido el hilo se notará el punto R: hecho esto, la extremidad S del hilo se pasará á Q de suerte, que P, R, Q hagan una línea recta: tírese la QS, y será perpendicular.

Demonstr. Por ser iguales RP, RS, RQ, el círculo hecho del radio RP pasará por S y Q: luego el ángulo PSQ está en el semicírculo: luego (31, 3 Eucl.) es recto.

De otro modo: divídase un hilo en 12 partes iguales con unos nudos: ajústense sus dos cabos en el punto S: extiéndanse 3 partes de dicho hilo sobre SP: dénse 5 á PQ y 4 á QS, y esta será perpendicular á PS. La razon es, porque el quadrado de PS es 9, y el de SQ 16, que juntos son 25, que es el quadrado de PQ: luego (48, 1 Eucl.) el ángulo S es recto, y QS perpendicular.

PROPOSICION VII.

De un punto puesto fuera de una línea dada en el suelo, tirar una perpendicular. (*fig.* 5.)

Del punto O se ha de tirar una perpendicular á la línea MN.

Operacion. Dóblese un hilo como en las antecedentes; y puesto el punto de en medio sobre O, ajústense sus cabos á la línea MN: pártase por medio MN en A, y la línea OA será perpendicular.

De otro modo: del punto dado Q extiéndase un hilo hasta qualquiera punto P de la línea dada PS: hállese la mitad

tad del hilo en R: dóblese por R de suerte, que la extremidad Q venga á S, y la línea QS será la perpendicular que se pide. Consta de lo dicho. De estas prácticas se pueden inferir otras muchas.

PROPOSICION VIII.

Medir una línea recta, que sea por un solo cabo accesible.

En este problema se contienen diferentes casos, que resolverémos en particular.

Caso 1. La línea horizontal EF (*fig*. 6.) es accesible en E, é inaccesible en F. Pídese su longitud.

Operacion. Fíxese perpendicularmente en E el palo EA, de 5 pies de largaria: fíxese en A el quadrado AC por el centro A del quadrante, de suerte, que se pueda mover arriba y abaxo: mírese por sus pínulas el cabo F, y nótense las partes que corta el perpendículo AO. *Si* corta al lado LC opuesto al de las pínulas, se hará una regla de tres, como LO á LA, así la altura AE á la longitud EF. Supuesto pues que LO sea 35 partes, y AE 5 pies, dirémos, si LO 35 dan LA 100: luego AE 5 pies, dará 14 pies y $\frac{2}{7}$ de un pie, y esta será la longitud de EF.

Demonstracion. Los triángulos ALO, FEA tienen los ángulos E y L rectos, y los ángulos FAE, LOA iguales, por ser alternos en las paralelas AH, LC: (29, 1 Eucl.) luego son equiángulos y semejantes: luego (4, 6 Eucl.) es LO á LA como EA á EF. Si el perpendículo corta el lado HC en O, (*fig*. 7.) será AH á HO como AE á EF; esto es, como AH 100 á HO, que supongo ser 80, así AE 5 pies, á EF 4 pies.

Demonstracion. Los triángulos OHA, FEA son equiángulos, por tener los ángulos E, H rectos y el ángulo A comun: luego (4, 6 Eucl.) son proporcionales AH á HO, como AE á EF.

Sí el perpendículo corta por el ángulo C, (*fig*. 8.) será la longitud EF igual á la altura AE; porque los triángulos ALC, AEF son equiángulos: luego como LA á LC, así *EA* á EF; y siendo LA, LC iguales, tambien lo serán EA, *EF*.

Quan-

Quando la distancia EF es larga, y la altura AE corta, (*fig.* 9.) será cierto el error, obrando del modo sobredicho, por no poder discernir la vista con precision el punto F, y ser el ángulo AEF muy agudo; y así en semejante caso se procederá del modo siguiente.

De la extremidad E sáquese en el suelo nivelado y llano la perpendicular EA, tan larga como se pueda; (6) sea por exemplo de 30 pies: aplíquese el quadrado en A, y mírese por las pínulas el punto F, y por el otro lado AH nótese el punto Q, en que la visual AQ corta á la FE prolongada: mídase la distancia EQ, y sea por exemplo 10 pies: quádrese por números AE, multiplicando 30 por 30, y el producto 900 partido por 10 que es EQ, dará el quociente 90, que es la distancia EF.

Demonstracion. (8, 6 Eucl.) AE es medida proporcional entre EQ, EF: luego su quadrado es igual al rectángulo de QE, EF: luego partiendo 900 quadrado de AE, por QE 10, el quociente será EF.

Caso 2. Pídese, que se mida la altura ó línea perpendicular FH. (*fig.* 10.)

Operacion. Póngase la asta EA á plomo sobre el suelo, y póngase en ella el quadrado CA como ántes, y sea AE 5 pies. Mídase con una vara la distancia EF si se puede; ó si no, mídase como en el caso precedente, y sea 40 pies. Hecho esto, mírese por las pínulas el punto H, y el perpendículo cortará el quadrado, ó por la diagonal ó por el lado CX ó por ZC.

Si corta el lado CZ como sucede en E, será como AZ á ZO; así EF ó AS á SH; esto es, por regla de tres, como 100 AZ, á 42 que supongo ser ZO, así AS 40 á SH, que se hallará ser 16 pies y $\frac{4}{5}$: añádase á esta altura la AE ó SF, y será FH 21 pie y $\frac{4}{5}$.

Demonstracion. Los triángulos ASH, AZO son equiángulos, por tener los ángulos ZS rectos, y los ángulos HAS, OAZ iguales; porque siendo ZAH, OAS rectos, quitado el comun ZAS, quedan HAS, OAZ iguales: luego dichos triángulos son proporcionales: luego AZ con ZO, es como AS con SH.

Si el perpendículo corta el lado XC como en Q, háSi el perpendículo corta el lado XC como en Q, hágase esta regla de tres: como XI, que supongo ser 60 á XP 100, así PS, que supongo ser 10 pies y $\frac{2}{25}$ avos, á SH 16 pies y $\frac{4}{5}$; y añadida PQ 5 pies, será toda la altura 21 pie y $\frac{4}{5}$. Si el perpendículo cayere por la diagonal, la distancia PS y la altura SH serán iguales; y añadida PQ ó SF, se sabrá toda la altura.

Caso 3. Pídese se mida la profundidad FP de un pozo. (*fig.* 11.)

Operacion. Mídase primero su amplitud VF, y sea 4 pies. Compóngase el quadrado Geométrico en EA de suerte, que mirando por las pínulas se vean los puntos V de la boca del pozo, y P de su profundidad; y el perpendículo cortará ó el lado CS ó el lado IC, ó por la diagonal.

Si corta el lado CS en O 40 partes, hágase la regla de tres: como OS 40 á SA 100, así 4 pies VF á FP 10 pies. Si el hilo cortase 40 partes en el lado IC, será la regla de tres: como 100 lado del quadrado, á 10 partes, que corta el hilo, así VF 4 pies, á FP 40 centésimas. Si corta por la diagonal, será la profundidad FP igual á la anchura FV. Consta de lo dicho.

PROPOSICION IX.

Executar lo mismo con otros instrumentos. (*fig.* 12.)

Las mismas operaciones de la proposicion pasada puede executar el Geómetra, valiéndose de los demas instrumentos que expliqué en el libro antecedente; pero por evitar molestia, solo repetiré aquí algunas para mayor inteligencia de su manejo.

1 Pídese se mida con el semicírculo la línea NO, solamente accesible en N, por causa de no poderse llegar al cabo O por haber un rio entre medio.

Operacion. Sáquese del punto N (6) una perpendicular NM, que se medirá con una vara: aplíquese el centro del semicírculo en M, y por las pínulas fixas en el lado MP mírese el punto N, y por la alidada mírese el cabo O: véase quántos grados tiene el arco PQ, y se sabrá el valor del ángulo M: luego conocidos el ángulo M y el ángulo N recto y el lado MN, se sabrá (1) el lado NO.

2 Pí-

2 Pídese se mida la distancia misma NO (*fig.* 13.) con la cruz Geométrica.

Operacion. Tirada como ántes la perpendicular NM, aplíquese sobre ella la vara mas larga de la cruz Geométrica de suerte, que por sus clavos ó pínulas se vea el punto N, y sin moverla de dicho lugar, acérquese despues ó apártese la vara transversal PQ, hasta que por los clavos MQ se descubra el cabo O; y medida la línea NM, se advertirá juntamente el grado que corta en el punto P el brazo PQ, y ese será (5) el valor del ángulo M: luego en el triángulo MNO, conocidos los ángulos M, N y el lado MN, se sabrá (1) el lado NO.

Si las varas de la cruz se dividen en partes iguales, se sacará la distancia NO por regla de tres: como MP á PQ, así MN á NO. De aquí se puede colegir el modo de executar semejantes operaciones con los sobredichos instrumentos.

PROPOSICION X.

Medir una línea del todo inaccesible.

Línea del todo inaccesible, es aquella á quien no podemos llegar por haber de por medio algun valle, rio ú otro impedimento.

Caso 1. (*fig.* 14.) Sea la línea horizontal EF totalmente inaccesible, por no poderse pasar un rio que hay de por medio, y es menester saber su longitud.

Operacion. Escójase qualquiera punto I de donde se descubran los extremos F, E: fíxese en I un palo perpendicular, y desde un lugar, como desde A, mírese por I la extremidad E de suerte, que AIE estén en una línea recta; y pasando á otro lugar B, mírese por I la extremidad F; tírense las rectas AI, BI: encamínense tambien por algun trecho las rectas AF, BE: divídanse las AI, BI en qualesquiera partes iguales, como por exemplo en tres, y sea una de ellas OI, QI: tírense OS, QP paralelas con AF, BE; y juntando SP, será SP la tercera parte de FE: mídase pues SP, y el número de pies que contiene, triplíquese, y se sabrá quántos pies de longitud tiene la línea FE.

De-

Demonstracion. En el triángulo AIF, es la OS paralela á AF: luego (2, 6 Eucl.) será IO á IA como IS á IF; y como IO sea el tercio de IA, será IS el tercio de IF. Asimismo probaré, que en el triángulo BIE es IP el tercio de IE. Esto supuesto, en el triángulo IEF, es IS á IF como IP á IE: luego (2, 6 Eucl.) SP, FE son paralelas: luego IS á SP, es como IF á FE; y alternando, es IS á IF como SP á FE: siendo pues IS el tercio de IF, será SP el tercio de FE.

Caso 2. (*fig.* 15.) Pídese se mida la altura perpendicular FH totalmente inaccesible, por no permitírsele al Geómetra llegar al punto F.

Operacion. Puesto el quadrado en Z, véase por sus pínulas el punto H, y nótense las partes que corta el hilo. Apartándose despues al punto X, por exemplo 50 pasos, fíxese el quadrado en X, cuidando que APS sea paralela al Horizonte; y atendiendo por *las pínulas la extremidad* H, nótense las partes que corta el hilo. Véase ahora si el hilo en entrambas estaciones ó en algunas de ellas cortó el lado opuesto al de las pínulas; porque sucediendo esto, siempre se necesitará de reduccion, en esta forma.

Supongamos que en la estacion Z cortó el hilo en dicho lado 84 partes, y en la estacion X cortó en el mismo lado 44 partes. Multiplíquese el lado del quadrado, que es 100, por sí mismo, y el producto 10000 pártase por 84, y será el quociente 119 partes y $\frac{1}{21}$ avo, que es RZ. Asimismo pártanse 10000 por 44, y saldrán 227 partes y $\frac{3}{11}$ avos, que es BT: réstese ahora el quociente menor RZ del mayor BT, y saldrá la diferencia 108 y $\frac{52}{231}$ avos, que es TL. Hágase ahora una regla de tres: como TL 108 y $\frac{52}{231}$ avos, diferencia de RZ, BT con AP, distancia de las estaciones 50 pies; así AB 100 á SH, altura de 46 pies y $\frac{1}{5}$: añádasele la PZ ó FS, que suponemos ser 6 pies, y será toda la altura FH 52 pies y $\frac{1}{5}$ de pie.

Demonstracion. Los triángulos ABT, ASH son equiángulos, por tener los ángulos BS rectos, y los ángulos BAT, AHS iguales en la entrada de las paralelas HF, AT: luego (4, 6 Eucl.) BT á BA, es como AS á SH; y alter-

narnando, es BT á AS como BA á SH. Por la misma razon y semejanza de los triángulos RPZ, PSH, es RZ á RP como PS á SH; y alternando, RZ á PS como RP á SH: luego toda BT á toda AS, será como RZ ó BL á PS: luego tambien es LT con AP, como BT con AS; esto es, como AB con SH, por ser entrambas razones iguales.

Caso 3. (*fig*. 16.) Pídese la altura DA, que se ha de medir desde el llano XZ.

Operacion. Háganse como ántes las dos estaciones X, Z, y se sabrá toda la altura AE. Búsquese despues de la misma suerte la altura DE, y restando esta de aquella, se sabrá la altura AD.

Caso 4. (*fig*. 17.) Pídese se mida la línea inclinada EH.

Operacion. Hállese por el *caso* 2 la perpendicular HF, y supongamos se halle ser de 25 pies. Búsquese despues por el *caso* 1 la longitud de la horizontal EF, y sea 40 pies. Quádrense dichos números, multiplicando 25 por 25, y 40 por 40, y sus quadrados serán 625, 1600. Súmense, y será la suma 2225. Sáquese la raiz quadrada de este número, y se hallará ser 47 y algo mas, y esta será la longitud de EH.

Demonstracion. El triángulo EFH es rectángulo en F: luego (47, 1 Eucl.) el quadrado de EH es igual á la suma de los quadrados de EF, FH: luego su raiz ó lado es la EH.

PROPOSICION XI.

Guiar una mina subterránea á un lugar correspondiente á otro señalado sobre la tierra. (*fig*. 18. 19. 20.)

Desde el lugar A se ha de conducir una mina por dentro de un monte, hasta que su cabo P corresponda en derechura al punto L puesto sobre tierra.

Operacion. 1. Mídase por la proposicion pasada la distancia AP, (*fig*. 18.) y al mismo tiempo en que por las pínulas del quadrante se observa el punto L, aplíquese á dicho quadrado una brúxula puesta dentro de un círculo graduado; y obsérvese qué grados señala su saeta: compóngase despues en el suelo sobre A de modo, que se-

señale los mismos grados; y al lado de su caxuela, que supongo sea bien quadrada, aplíquese una regla, y tirando con ella una línea, se irá por ella abriendo la mina tan larga, como es la distancia medida AP.

Si la mina no se pudiere guiar rectamente de A á P, por haber de por medio alguna peña ú otro impedimento, se habrá de doblar por SQ; y en papel aparte se tirará la recta AP, (*fig.* 19) á quien se le darán tantas partes de un pitipié, como tiene pies de longitud la mina AP, (*fig.* 18.) y sean 173. Cuéntense los pies que hay en la mina desde A á S, y sean 42, y contando 42 partes en el papel (*fig.* 19.) desde A á S, se notará el punto S. Tómese ahora el ángulo QSP, (*fig.* 18.) y sea por exemplo 60 grados, y hágase en el papel el otro ángulo QSP de 60 grados. Tómense asimismo los pies que hay en el brazo de mina SQ, y sean 41, y del pitipié se le darán en el papel á SQ 41 partes.

Obsérvense ahora (*fig.* 18.) los grados del ángulo VQS, y sean 90, y hágase en el papel (*fig.* 19.) el ángulo VQS de 90 grados. Véase quántas partes del pitipié tiene la línea VQ, y sean 73, y de tantos pies se ha de abrir el brazo de mina QV, (*fig.* 18.) para restituirse á la recta AP. Exâmínese ahora (*fig.* 19.) quántas partes del pitipié tiene la AV, y sean 103, y como toda la AP tenga 173, será la VP de 70 partes; y así se sabrá, que la parte de mina VP (*fig.* 18.) se ha de abrir hasta 70 pies. Asimismo se procederá, aunque haya mas revueltas, miéntras que todas sean horizontales, sin subir ni baxar; porque si subiesen ó baxasen, se habrá de obrar del modo siguiente.

Supongamos que la parte de mina SQ (*fig.* 18.) se inclina, formando con la horizontal ángulo de 20 grados, y que su longitud es de 41 pies. Tírese en papel aparte (*fig.* 20.) la línea ST, que representará la horizontal de la mina, y haciendo el ángulo CSE de 20 grados, se le darán á SE 41 partes del pitipié; y levantando la EC perpendicular á ST, se verá por el pitipié de quántas partes consta, y á tantos pies de la horizontal de la mina corresponderá el punto Q. (*fig.* 18.)

Por el punto E tírese la paralela RE, que representará la lí-

línea horizontal inferior que pasa por el punto Q de la mina, que como dixe está mas profundo; y la recta SC pásese á la SQ de la *fig.* 19. y tírese EI paralela á QV, por pedirlo así el caso presente. Supongo ahora, que el brazo de la mina QV (*fig.* 18.) se levanta con elevacion de 10 grados. Hágase pues en la *fig.* 20. el ángulo REO de 10 grados, y tírese la recta EO. Tómese ahora la recta CT igual á EI de la *fig.* 19. y tirando la perpendicular TO, se determinará la EO, que comprehenderá tantas partes del pitipié, quantos pies ha de tener la QV de la mina (*fig.* 18.) para alcanzar la rectitud AP.

Puesto ya el minador en V, dispondrá la brúxula de suerte, que señale el mismo grado que señalaba en A, y continuará la mina rectamente, dándole á VP tantos pies, quantas partes del pitipié tiene la VP de la *fig.* 19. Esto se ha de executar con sumo cuidado, y comprobándolo muchas veces. Otras circunstancias pueden ocurrir, que se dexan al juicio del Geómetra, y se pueden inferir de lo dicho.

PROPOSICION XII.

Señalar en la superficie de la tierra el punto correspondiente al cabo de una mina. (*fig.* 21.)

Supónese hecha ya una mina, y se desea saber el punto N, que en la superficie de la tierra corresponde perpendicularmente á su cabo.

Operacion. Píntese en un papel la planta y direccion de la mina por las reglas antecedentes; y últimamente se sabrá quántos pies hay desde su principio M, hasta su cabo P por línea recta. Supongo pues que MP es 173 pies: fíxese un palo perpendicular AM, y sobre él la vara AB bien nivelada, y que corresponda á la MP, lo que se consigue por medio de la brúxula, como en otra parte dixe. Cuéntense los pies de que consta AB, y guárdese el número: hágase lo mismo en B, y consérvese el número de pies que hay en CD; y así se proseguirá, hasta que los números de las varas AB, CD, &c. hagan 173 pies; y donde se terminare este número, será el punto N correspondiente al cabo P.

PRO-

PROPOSICION XIII.

Hacer una descripcion Icnográfica de una Ciudad ó Fortaleza. (*fig.* 22.)

Descripcion Icnográfica se llama la que expresa la planta de una Ciudad, Fortaleza ó Edificio, como si una Ciudad se considerase cortada horizontalmente cerca de la superficie de la tierra, aparecerian en aquella seccion los vestigios de todos sus Edificios, Calles, Plazas, &c. y la expresion de este vestigio se llama *Planta* ó *Icnografía* de la Ciudad. Execútase por las reglas dadas en este libro, observando con todo cuidado los ángulos que llaman de *posicion*, como se sigue.

Escójanse dos lugares ó torres de la Ciudad A y B, que disten notablemente entre sí, porque siendo crecida su distancia, se asegura mas el acierto. Estos lugares han de estar en tal parage, que de cada uno de ellos se descubran todas ó la mayor parte de las Torres de la Ciudad. Desde el lugar A, con el semicírculo obsérvense por la *propos.* 6 *lib.* 8 los ángulos BAC, BAD, BAE y todos los demas, dirigiendo la alidada á todas las Torres. Despues se pasará el Geómetra al lugar B, desde el qual observará de la misma suerte los ángulos ABC, ABD, ABE, &c.

Hechas estas observaciones, y comprobadas con toda diligencia, repitiéndolas de otros dos lugares distintos de los primeros, se tirará en el papel la línea FG correspondiente á la AB; y en el punto F se formarán los ángulos HFI, IFL, LFG correspondientes é iguales á los que se observaron en A; y asimismo se formarán en G los demas ángulos que expresa la figura, correspondientes é iguales á los observados en el lugar ó punto B. Y en el punto H en que concurren las FH, GH correspondientes á AC, BC, se pintará la Torre C. Asimismo en el punto I, en que concurren las líneas FI, GI se pintará la Torre D, como en L la Torre E. Y obrando en esta forma, quedarán las Torres y puntos principales de la la Ciudad colocados en sus propios lugares y distancias. Determinados estos puntos principales, será fácil la delineacion de las calles y plazas, observando su longitud, latitud, esquinas, &c.

Con este mismo artificio los Sitiadores de una Plaza podrán delinear la planta de toda ella, observando de quatro ó cinco estaciones todos sus puntos principales, como son los ángulos de los baluartes, flancos, torres y demas puntos notables.

LIBRO X.

DE LA DIMENSION DE LAS SUPERFICIES.

PROPOSICION I.

Medir la área de un paralelógramo rectángulo. (*fig.* 1.)

Pídese se mida la área ó superficie del rectángulo AH.

Operacion. Véase de quántos palmos consta el lado AF, y tambien el lado AI: y multiplicando el un número por el otro, se sabrá de quántos palmos quadrados conste la superficie AH: como si AF es 6, y AI es 3, la superficie AH será de 18 palmos quadrados, que es el producto de 6 por 3. La razon es, porque siendo AF de 6 palmos, y AI de 3, la serie AF que contiene 6 palmos quadrados, cabrá tres veces sobre AI: luego todo el rectángulo será 18.

PROPOSICION II.

Medir la área de un triángulo rectilíneo. (*fig.* 2.)

Se ha de medir la superficie del triángulo AOI.

Operacion. Del ángulo O tírese la perpendicular OZ á la basa. Mídase esta perpendicular y la basa; y sea por exemplo OZ 16 palmos, y AI de 42. Multiplíquese la perpendicular 16 por la mitad de AI, que es 21, y el producto 336 es la superficie del triángulo.

Demonstr. El triángulo AOI es la mitad del paralelógramo de la misma basa AI y de la misma altura OZ: (41, 1 Eucl.)

1 Eucl.) luego es igual al paralelógramo hecho de la mitad de la basa y de la misma altura ; este (1) se halla multiplicando ZO por la mitad de AI : luego es constante la regla.

Si por algun accidente no se puede medir la perpendicular OZ , se sacará su medida de esta manera : Mídanse los lados , y sea AI 42 , sea OI 34 , y AO 20. Hágase ahora por regla de tres : como AI 42 con 54 suma de los otros lados , así 14 diferencia de los mismos lados con 18 : réstese este número de 42 , que es el lado AI, y el residuo será 24 , cuya mitad 12 será el segmento AZ. Si el número hallado por la regla sobredicha fuere mayor que el lado AI, se restaria este lado 42 de dicho número , y se sabria tambien el segmento AZ. Sabido pues este segmento , que es 12 , su quadrado 144 se restará de 400 quadrado de AO, y del residuo 256 sáquese la raiz quadrada 16 , y esta será la perpendicular OZ , como consta de la 47 del 1 de Eucl. Conocida esta , se sabrá la área del triángulo como ántes. La demonstracion se verá en la Trigonometría.

Puédese tambien saber la área del mismo triángulo sin valerse de la perpendicular , por la regla siguiente , que demuestra el P. Clavio *lib.* 4 de su *Geom. Pract. cap.* 2. Sea AI 42 , sea OI 34 , y AO 20. Súmense los tres lados , y será la suma 96 , y su mitad 48. Réstense de 48 cada lado de por sí , y serán los residuos 6 , 14 , 28. Multiplíquense 6 por 14, y el producto 84 por 28 , y el producto 2352 por la semisuma 48 , de cuyo producto 112896 sáquese la raiz quadrada , que será 336 , y esta es la área del triángulo.

PROPOSICION III.

Medir la área de los quadriláteros no rectángulos.

1 Pídese la área del quadrilátero AC paralelógramo. (*fig.* 3.)

Operacion. Tírese la perpendicular CI al lado opuesto : mídase dicha perpendicular , y sea 100 por exemplo. Multiplíquese esta perpendicular por el lado AS , que supongo ser 200 , y el producto 20000 será la área del quadrilátero AC.

De-

Demonstracion. Por dicha multiplicacion sale la área del paralelógramo rectángulo hecho de AS, CI. (2) El quadrilátero AC es igual al rectángulo de AS, CI, por tener entrambos una misma basa y altura: (35, 1 Eucl.) luego, &c.

2 Pídese la área del trapezio ABPR.

Operacion. Tírese la diagonal AP, y quedará resuelto en dos triángulos: mídase (2) la área de estos triángulos, y la suma de los dos será la área del trapezio.

PROPOSICION IV.

Medir la área de qualquiera polígono. (fig. 5.)

1 Se desea saber la área de un polígono regular, como del pentágono ABC, &c.

Operacion. Hállese su centro F. (17, 1 de este trat.) Desde F tírese la FG perpendicular á qualquiera lado: mídase tanto dicha perpendicular, como el ámbito del polígono; y multiplíquese la mitad del ámbito por la perpendicular, y el producto será igual á la área del polígono. La razon es, porque esta es igual á la área del triángulo, que tiene por altura la FG, y por basa todo el ámbito. (4, 7 de este trat.) La área de este triángulo se sabe (2) multiplicando la mitad de su basa por la altura FG: luego tambien la área del polígono.

2 Pídese la área del polígono irregular LVS, &c. Divídase en triángulos, y (2) sáquese la área de cada triángulo; y la suma de todas será la área del polígono.

PROPOSICION V.

Medir la área de un círculo.

Para medir la área de un círculo, se ha de saber primero su diámetro y su periferia, por lo que dixe en el *lib.* 7, y multiplicando la mitad de su periferia por el semidiámetro, se sabrá la área. Sea pues el diámetro de un círculo 30 pies, su periferia será 94 y $\frac{20}{100}$ avos, y la semipeperiferia será 47 y $\frac{10}{100}$ avos. Multiplíquese 47 y $\frac{10}{100}$ avos por el semidiámetro, que es 15, y el producto 706 ½ es la área del círculo. La razon consta de la *prop*. 5 del *lib*. 7.

De otro modo: multiplíquese el diámetro 30 por 30, y saldrá el quadrado del diámetro 900. Y porque este quadrado (8, 7 de este) á la área del círculo, es como 14 á 11, hágase esta regla de tres: como 14 á 11, así 900 á 707 pies y $\frac{1}{7}$, que es la área del círculo, segun la razon de Arquimédes.

PROPOSICION VI.

Medir la área de los sectores y segmentos del círculo. (*fig*. 7.)

1 Búscase la área del sector AOBC.

Operacion. Mídase el radio OA, y sea 10 pies. Mídase el arco ACB, y sea 21 pies. Multiplíquese la mitad del arco 10 ½ por el radio 10, y el producto 105 será la área del sector. Fúndase en el *corol*. de la *prop*. 5 del *lib*. 7.

2 Pídese la área del segmento AFBC.

Operacion. Hállese por el modo dicho la área del sector AOBC. Hállese (2) la área del triángulo AOB: réstese esta área de la del sector, y el residuo será la área del segmento. De aquí se colige el modo de medir las superficies compuestas de segmentos de círculos.

PROPOSICION VII.

Medir la área de la elipse. (*fig*. 8.)

Sea DGFH una elipse, y se pide su área.

Operacion. Mídanse entrambos diámetros, y supongamos sea DF de 64 pies, y GH de 49. Búsquese un número medio proporcional entre 64 y 49, que se hallará por la Pantómetra, (15, *lib*. 8 de este) ó multiplicando 64 por 49, y del producto 3136 sacando la raiz quadrada 56; y este 56 es el diámetro de un círculo igual á la elip-

elipse. (20, 7 de este trat.) Hállese pues la área de este círculo, (5) y quedará conocida la área de la elipse.

PROPOSICION VIII.

Medir la área de una parábola. (*fig.* 9.)

Parábola es una figura plana, como ABC, que nace de la seccion de una pirámide cónica paralela á su lado: pídese su medida.

Operacion. Tírense las rectas AB, CB, y el triángulo ABC quedará inscrito en la parábola. Alárguese la basa AC hasta E de suerte, que GE sea un tercio de AC. Tírese la BE, y el triángulo ABE será igual á la parábola, como demuestra Arquimédes en lo de *quadrat. parab.* Mídase pues la área del triángulo ABE, (2) y se sabrá la área de la parábola.

La dimension de las superficies de los sólidos se hallará en el libro siguiente.

LI-

LIBRO XI.

DE LA ESTEREOMETRÍA Ó MENSURACIÒN DE LOS SÓLIDOS.

PROPOSICION I.

Medir la área de los prismas y cilindros. (fig. 1.)

1 MÍdase por el libro antecedente la área de la basa del prisma ó cilindro. 2 Tírese una perpendicular de la basa superior á la inferior, alargando esta si fuere menester, por caer la perpendicular fuera del sólido que se mide. 3 Multiplíquese la basa por la perpendicular, que es la altura, y el producto será la área ó solidez del prisma ó cilindro.

Exemplo. Sea el paralelepípedo AQ, el lado AB de la basa sea 3 palmos, su altura AO sea 5. Y porque la basa AC se supone ser quadrada, y que su lado es 3, será su área 9: multiplíquese 9 por AO, que es 5, y será 45 palmos cúbicos toda la área AQ.

Demonstr. Por constar la basa AC de 9 palmos quadrados, cabrán sobre ella justamente 9 palmos cúbicos, que cada uno tiene un palmo de altura: si sobre estos se ponen otros 9, llenarán otro palmo de altura; y así de los demas: con que para llenar todo el paralelepípedo, serán menester tantas veces 9 palmos cúbicos, como hay palmos en la altura AO: luego multiplicando la basa por la altura, se sabe la solidez AO.

Lo mismo se verifica en los prismas y cilindros inclinados; porque multiplicando la basa AC por AO ó HG su igual, se sabe la área del sólido AQ: siendo pues (31, 11 Eucl.) el paralelepípedo inclinado BF igual al AQ, por tener una misma basa y altura, es cierto que multiplicando AC por HG, se sabrá la solidez del inclinado BF.

Lo que se ha demonstrado en los paralelepípedos, vale tambien en los prismas triangulares, por ser estos (28, 11 Eucl.) la mitad de los paralelepípedos de una misma basa y altura, y en los demas prismas por resolverse todos en triangulares, y en los cilindros por ser estos unos prismas de infinitos lados, por la misma razon que en el *lib.* 12 dixe ser el círculo un polígono de lados infinitos.

PROPOSICION II.

Medir la superficie de los prismas y cilindros.

La superficie de los prismas y cilindros rectos se consigue multiplicando el ámbito de su basa por la altura, y el producto será la superficie que se busca; y si á esta se añaden las superficies de entrambas basas, se sabrá la superficie total.

Exemplo. Supongamos que un cilindro recto tiene 8 palmos de altura, y la circunferencia de su basa es 157: multiplíquense 157 por 8, y el producto 1256 será la superficie cilíndrica. Sáquese ahora (3 *lib.* 7 de este trat.) el diámetro de su basa, que será 50, y luego se sabrá (5 del libro anteced.) la área de dicha basa, que será 1964 y $\frac{2}{7}$: duplíquese, y será 3928: añádase este número á 1256, y será la superficie total del cilindro 5184.

Demonstr. No hay duda en que de los quatro rectángulos del paralelepípedo AQ, que son AS, BQ, CR, AR, se puede formar un rectángulo, que tenga por basa las quatro basas AB, BC, &c. esto es, todo el ámbito del quadrado AC, y por altura la AO, que lo es del paralelepípedo, y este rectángulo será igual á la superficie del paralelepípedo, ménos sus basas. Dicho rectángulo se mide multiplicando su basa por la altura: luego la superficie del paralelepípedo, ménos sus basas, tambien se mide multiplicando el ámbito de su basa por la altura. Lo mismo se convence de los prismas por la misma razon; y de los cilindros, por ser prismas de infinitos lados.

Si el cilindro ó prisma son inclinados, se medirá su superficie no por la basa MN, (*fig.* 2.) sí por otra basa MQ perpendicular á los lados. Mídase pues el ámbito de esta basa con un hilo, cuidando que forme ángulos rectos con

los

los lados OM, PN, y multiplicando este ámbito por el lado PN ó FQ, se sabrá la superficie del cilindro sin las basas. La razon es, porque la superficie del cilindro obliqüo MP, es igual á la del recto FM; porque quitándole el segmento MNQ, y añadiéndole OFP, quanto se le quita por una parte, se le añade por la otra, por ser dichos segmentos iguales en quanto á la solidez y superficie. Hallándose pues la superficie del cilindro recto OMF del modo sobredicho, tambien se hallará de la misma suerte la del obliqüo OMP.

PROPOSICION III.

Medir la área de las pirámides. (fig. 3.)

La solidez de las pirámides, sean cónicas ó qualesquiera otras, se halla por la regla siguiente. 1 Búsquese la área de su basa por el lib. anteced. 2 Tírese una perpendicular á la basa desde su vértice, y porque regularmente suele caer dentro de la pirámide, se pondrá una regla recta OP en el vértice O paralela á la basa; y de qualquiera punto P se tirará la perpendicular PQ á la basa alargada. 3. Multiplíquese la área de la basa por el tercio de la altura PQ, y el producto será la área ó solidez de la pirámide: como si la basa es 100 y la altura 30, multiplicando 100 por 10, tercio de la altura, el producto 1000 será la solidez.

Demonstracion por la 7 y 10 del *lib.* 12 Eucl. Las pirámides son el tercio de los prismas de igual basa y altura; y si son cónicas, son el tercio de los cilindros. La solidez de los prismas y cilindros nace de la multiplicacion de su basa por la altura: luego la solidez de las pirámides proviene de la multiplicacion de su basa por el tercio de su altura.

PROPOSICION IV.

Hallar la superficie de las pirámides.

1 La superficie de las pirámides polígonas se halla buscando la área de cada triángulo de los que componen su superficie, y sumando las áreas halladas; y si á esta suma se añade la área de la basa, se sabrá la total superficie. Si la pirámide polígona fuere regular, se hallará su superfi-

ficie con una sola operacion; es á saber, multiplicando el semiámbito de su basa por la perpendicular tirada de su vértice á uno de los lados de su basa.

2 Para hallar la superficie de una pirámide cónica recta sin la basa, se multiplicará el semiámbito de la basa por el lado de dicha pirámide, y el producto será lo que se desea. La razon es, porque la pirámide cónica es una pirámide regular de infinitos lados, por degenerar las polígonas en cónicas; la superficie de las polígonas es el producto del semiámbito de su basa, por la perpendicular del vértice á la basa de qualquier triángulo: luego como en la pirámide cónica recta todas las rectas del vértice á la periferia de la basa sean iguales, saldrá su superficie multiplicando el semiámbito de la basa por su lado.

Para medir la superficie de la pirámide cónica obliqüa no hay regla especial, y así se habrá de proceder por modo ménos Geométrico, reduciéndola á quadrículas pequeñas.

COROLARIOS.

1 *La superficie de una pirámide cónica recta, á la superficie del círculo que tiene por basa, es como el lado de dicha pirámide, al radio de la basa. La razon es, porque la superficie de dicha pirámide es igual al rectángulo hecho del lado de dicha pirámide, y de la semiperiferia del círculo de su basa. Este círculo (5, 7 de este trat.) es igual al rectángulo hecho del radio y de la semiperiferia; pues como estos rectángulos tengan una misma basa, que es la semiperiferia, serán entre sí como las alturas; esto es, como el lado de la pirámide cónica, al radio del círculo que es su basa: luego la superficie de dicha pirámide y de su basa, son como el lado al semidiámetro de la basa.*

2 *La superficie de un cilindro recto, á la superficie de la pirámide cónica de igual basa y altura, se ha como el lado del cilindro á la mitad del lado de la pirámide. La razon es, porque la superficie del cilindro recto es igual al rectángulo hecho del lado y de toda la periferia de su basa; (2) y la superficie de la pirámide cóni-*

ni-

nica es igual al rectángulo de su lado y la semiperiferia de su basa ; ó tambien (que es lo mismo) de la mitad de su lado y de toda la periferia de su basa : luego siendo sus basas iguales , serán como las alturas ; esto es , como el lado del cilindro , á la mitad del lado de la pirámide.

PROPOSICION V.

Medir la área de las pirámides truncadas. (fig. 4.)

Sea la pirámide cónica truncada AOFE , y se busca su solidez.

Operacion. Considérese toda entera ACO : mídase (3) la solidez de toda : mídase tambien la solidez de la pirámide ECF : réstese esta solidez de aquella , y el residuo será la truncada AOFE.

Para hallar prácticamente la altura de toda la pirámide ACO , se obrará como se sigue. Hállese la altura MN de la truncada , como en otra parte dixe , y fórmese esta regla de tres : como la diferencia de los diámetros de las basas EF , AO al diámetro superior EF , así la altura hallada MN al residuo MC de toda la altura : añádase MC á MN , y se sabrá toda la altura.

Sea pues (por exemplo) el diámetro AO 10 , y el diámetro EF sea 4 , y la MN sea 12. Hágase como 6 diferencia de los diámetros , con 4 que es el diámetro menor , así 12 con 8 : con que MC es 8 , que añadidos á MN 12 , resulta toda la CN 20.

La razon de esta regla es , porque siendo los triángulos ACO , ECF semejantes , será (4 , 6 Eucl.) AO con AC como EF con EC ; y alternando , como AO con EF , así AC con BC : luego dividiendo , (cortando AI igual á EF) será como IO con EF , así AE con EC ; y porque los planos paralelos AO , EF alargados , cortan las rectas CA , CN proporcionalmente , será IO diferencia de los diámetros de las basas , con EF diámetro menor , como MN con CM.

Halladas ya las alturas MN , CN , se hallará la área ó solidez de entrambas pirámides AOC , EFC por la regla sobredicha : por la AO , que hemos supuesto ser 10 , se saca la periferia de la basa mayor 31 $\frac{3}{7}$ avos; y multiplicando el semidiámetro 5 por la semiperiferia 15 $\frac{5}{7}$ avos, sale la área de dicha basa 78 $\frac{4}{7}$ avos: multiplíquese 78 $\frac{4}{7}$ avos por el tercio de la altura CN; esto es, por 6 $\frac{2}{3}$ avos, y será la solidez de la pirámide total AOC 523 $\frac{17}{21}$ avos. De la misma suerte, sabida la altura CM 8 de la pirámide EFC y su diámetro EF 4, se hallará su solidez 33 $\frac{14}{21}$ avos, que restada de 523 $\frac{17}{21}$ avos, resta la solidez del fragmento AOFE 490 $\frac{3}{21}$ avos.

PROP. VI. Teorema.

Qualquiera porcion de pirámide triangular ABCD, &c. (fig. 5.) se divide por las diagonales AD, EB, DB, en tres pirámides ABCD, AEBD, EFBD, continuas proporcionales en la razon misma de los lados homólogos AC, ED de sus basas.

Demonstr. Los triángulos ADC, DAE están entre las paralelas CA, DE: luego (1, 6 Eucl.) son como sus basas AC, ED; y como (5, 12 Eucl.) las pirámides ABCD, AEBD, que tienen su vértice comun B, sean como los triángulos dichos ADC, DAE que son sus basas, se sigue ser entre sí dichas pirámides como CA á ED. Tambien las pirámides AEBD, EFDB, que tienen por vértice comun D, son como sus basas ABE, EBF; estas basas son como AB á EF, ó como AC á ED, por la semejanza de los triángulos ABC, EFD: luego las pirámides AEBD, EFDB, son como AC á ED: luego las tres pirámides son proporcionales en la misma razon de AC á ED.

PROPOSICION VII.

Medir de otro modo la área ó solidez de las pirámides truncadas.

1 Mídase la altura de la pirámide truncada como arriba dixe. 2 Mídanse ambas basas mayor y menor, y entre ellas hállese otra basa que sea media proporcional Geométrica. 3 Súmense las tres basas, y multiplíquese esta suma por el tercio de la altura, y el producto será la solidez que se busca.

Exem-

Exemplo. La altura de la pirámide truncada sea 18, su basa inferior sea 100, la superior 16. Multiplicando 100 por 16, y del producto 1600 sacando la raiz quadrada 40, serán las tres basas continuas proporcionales 16, 40, 100; cuya suma 156 multiplicada por 6, tercio de la altura 18, da el producto 936, y esta es la solidez que se desea.

Demonstracion. Multiplicando las basas 100 y 16 por 6, tercio de la altura, se tienen las dos extremas pirámides ABCD, AFDB; y porque la basa 40 es media proporcional entre las basas 100 y 16, y se ha multiplicado por el mismo 6, tercio de la altura, es forzoso salga de dicha multiplicacion una pirámide media proporcional entre las extremas: luego por la regla sobredicha se hallan las tres pirámides, en que se divide qualquiera fragmento de pirámide: luego se halla la solidez de la pirámide. Y porque qualquiera fragmento de pirámide polígona se divide en fragmentos de triangulares, valdrá en todas la misma regla; y asimismo en la cónica truncada, por ser esta una pirámide polígona de infinitos lados.

PROPOSICION VIII.

Hallar la superficie de las pirámides truncadas.

Para hallar la superficie de qualquiera pirámide truncada, se observará lo siguiente. 1 Hállese la superficie de la pirámide entera: búsquese la superficie del segmento que falta, y restando esta de aquella, se sabrá la superficie de la truncada.

Pero para medir la superficie de la pirámide cónica recta truncada, usarémos de la regla siguiente, sacada del *lib.* 1 de Arquimédes de *Sphæra & Cylindro.* Búsquese un medio Aritmético entre las periferias de las basas, que se hallará sumándolas y tomando la mitad de la suma: multiplíquese este medio por el lado del trozo de la pirámide cónica, y el producto será la superficie que se busca sin las basas.

Exemplo. (*fig.* 6.) Sea la pirámide cónica truncada AD, cuya superficie curva se desea saber. Segun la regla primera ra se hallará así: Sea la periferia mayor 300, y la menor sea 100. Sea el lado AC del segmento 20, y por la *propos.* 5 se hallará ser el lado de toda AE 30, y el lado CE del segmento que falta, será 10. Multiplico 30 por 150, y será (4) el producto 4500 la superficie de toda la pirámide entera. Multiplico asimismo 10 por 50, y el producto 500 será la superficie del segmento CED. Resto pues 500 de 4500, y el residuo 4000 es la superficie de la pirámide truncada AD.

Segun la regla segunda, se procederá así: Sumo 300 y 100, y de la suma 400 tomo la mitad 200, medio Aritmético entre las dos periferias: multiplico 200 por 20 lado AC, y el producto 4000 es la superficie de la pirámide truncada AD.

Demonstr. Hágase el triángulo rectángulo PQS, cuyo lado PQ sea igual al lado AE de la pirámide cónica total, y QS sea igual á la periferia de la basa AB, y será dicho triángulo igual al rectángulo hecho de PQ y la mitad de QS, (41, 1 Eucl.) y por consiguiente igual (4) á la superficie de la pirámide total AEB. Asimismo tómese TQ igual al lado AC del trozo, y tirando TV paralela á QS, será el triángulo PTV igual á la superficie de la porcion CED: luego el trapezio TQSV es igual á la superficie de la pirámide cónica truncada AD. Hallándose pues la área de dicho trapezio multiplicando la RI ó QN, media Aritmética entre TV, QS por la altura TQ, por ser el rectángulo QM igual al trapezio TQSV, por quanto el triángulo INS que se le quita es igual á VMI que se le añade, la área de la pirámide cónica truncada AD se hallará del modo sobredicho.

PROPOSICION IX.

Medir la solidez de un prisma triangular por la basa paralelógrama. (fig. 7.)

Aunque en la *prop.* 1 de este libro dí una regla general para medir todos los prismas por las basas opuestas que son iguales, conviene para lo siguiente tener notiticia de este otro modo de hallar la solidez de un prisma triangular OMT, tomando por basa conocida el paralelógramo MP.

Operacion. Tírese del punto F la perpendicular FG al plano de la basa: multiplíquese esta basa por la mitad de la perpendicular FG, ó la mitad de la basa por toda la FG, y el produćto será la solidez del prisma.

Demonstracion. El prisma (28, 11 Eucl.) es la mitad del paralelepípedo de la misma basa MP, y de la misma altura FG: este resulta de la multiplicacion de la basa por toda la altura: (1) luego el prisma resultará de la multiplicacion de la basa por la mitad de la altura.

PROPOSICION X.

Medir un segmento de prisma triangular, cortado con un plano paralelo á la basa paralelógrama. (*fig.* 7.)

Supónese el mismo prisma OMT cortado con el plano HILR paralelo á la basa paralelógrama MP, y se pide la solidez del segmento MHRN.

Operacion. Mídanse las áreas de los planos MP, HIRL: súmense las dos, y tómese la mitad de la suma: multiplíquese esta semisuma por la altura perpendicular IG del fragmento, y el produćto será su solidez. Demuéstrase como la *regla* 2 de la *prop.* 8.

PROPOSICION XI.

Medir la solidez de las paredes de un edificio. (*fig.* 8.)

Pídese se mida la solidez de la pared DB.

Operacion. Mídase su longitud AC, y sea 12: mídase su crasicie DA, y sea 3, y su altitud sea 9. Multiplíquese 12 por 3, y el produćto 36 multiplíquese por 9, y el produćto 324 será la solidez de la pared. Consta de la *prop.* 1. Para medir las demas paredes que forman los ángulos como la AF, se ha de cuidar no contar dos veces el paralelepípedo AH; y así de la longitud AI se descontará la crasicie AD, que pertenece á la pared AB.

PRO-

PROPOSICION XII.

Medir la solidez de las paredes de desigual crasicie. (*fig*. 9.)

Quando las paredes tienen gordaria desigual, como es en las cortinas y baluartes de las Fortalezas, se tomará una crasicie media: como si se ha de medir el pedazo de muro DB, no se ha de usar de la crasicie AC ni de la DE, sí de la otra media DH. Esta se multiplicará por la altura AD, y el producto por la longitud CI; y resultará la solidez que se pide. La razon es, porque semejantes paredes son un segmento de prisma cortado con un plano AI paralelo á la basa paralelógrama DB: luego (10) se hallará su solidez por la sobredicha regla.

De lo dicho hasta aquí se colige el modo de medir qualesquiera cuerpos irregulares; porque ó se reducen á los sobredichos, ó se componen de segmentos, que cada uno de ellos se podrá medir por las reglas demonstradas.

Los teoremas siguientes conducen á la dimension de la superficie y solidez de la esfera y de sus segmentos.

PROP. XIII. Teorema.

Las circunferencias de los círculos se han entre sí como sus diámetros.

Esta proposicion queda demonstrada en el *corol.* 2 de la *prop.* 2 del *lib.* 12 de la *Geometría Elementar.*

COROLARIO.

De la sobredicha proposicion se infiere, que el diámetro de qualquiera círculo al agregado de los diámetros de otros círculos, tiene la misma razon, que la circunferencia de aquel círculo al agregado de las circunferencias de los otros. (13, 5 *Eucl.*) *Y el producto de la periferia de un círculo por el diámetro de otro, es igual al producto de la periferia de este por el diámetro de aquel.* (16, 6 *Eucl.*)

PRO-

PROP. XIV. Teorema.

Si dentro de un círculo se inscribe un polígono regular parilátero, singularmente de 8, 12, 16, &c. lados, cuyo número se pueda partir por 4 como el de la fig. 10. y dicho polígono rueda al rededor del diámetro AB, se engendrará un sólido comprehendido de superficies cónicas, las quales juntas serán iguales al produčto del lado AE del polígono, multiplicado por todas las periferias de los círculos, que con su movimiento describen los ángulos del polígono.

Demonstracion. Con el sobredicho movimiento circular del polígono al rededor de AB, el lado AE engendra la superficie cónica, que es igual al produčto del lado AE y de la semiperiferia del círculo cuyo diámetro es EG. (4) El lado EF engendra la superficie cónica truncada, que es igual al produčto de EF ó AE, por una circunferencia media entre las de las basas, (8, *regla* 2) ó (que es lo mismo) por la semiperiferia del círculo cuyo diámetro es EG, y por la semiperiferia del círculo cuyo diámetro es FH: donde se vé claramente, que las superficies engendradas de AE, EF son iguales al produčto de AE por toda la periferia de EG, y por la semiperiferia de FH.

El lado FC engendra la superficie truncada igual al produčto del lado FC ó AE, por la semiperiferia del círculo cuyo diámetro es FH, (que es la residua de la multiplicacion pasada) y por la semiperiferia del círculo cuyo diámetro es CD: con que las superficies engendradas por AE, EF, FC son iguales al produčto de AE, por la periferia del diámetro EG, por la del diámetro FH, y por la semiperiferia del círculo cuyo diámetro es CD. De la misma suerte probaré, que las superficies engendradas por CI, IK, KB son iguales al produčto de AE, por la semiperiferia del círculo cuyo diámetro es CD, por la de IL, y por la de KP: luego la superficie de todo el sólido sobredicho es igual al produčto del lado AE, por todas las periferias de los círculos de los diámetros EG, FH, &c.

PRO-

PROPOSICION XV.

Si se tira la recta BG, (fig. 10.) será la superficie del sólido sobredicho igual al producto de la periferia circular ACBD por dicha recta BG.

Demonstracion. Tiradas las rectas EH, FD, CL, IP, quedan formados los triángulos GAQ, ESQ, HSN, FTN, &c. los quales son semejantes al triángulo BAG, porque son rectángulos en Q, N, M, &c. y el mayor lo es en G, (31, 3 Eucl.) y los ángulos E, H, F, &c. como tambien ABG, son iguales, por insistir en iguales periferias. (21, 3 Eucl.)

Por ser pues dichos triángulos semejantes, será (4, 6 Eucl.) como BG con GA, así GQ con QA, y así EQ con QS, y así HN con NS, &c. luego (12, 5 Eucl.) será como BG con GA, así el agregado de EG, FH, CD, IL con las AQ, QS, SN, &c. ó con toda la AB; esto es, como un antecedente á un conseqüente, así el agregado de todos los antecedentes, que son los diámetros, al agregado de todos los conseqüentes, que es el diámetro AB: luego siendo (13) las periferias como los diámetros, será como BG con GA; así la periferia cuyo diámetro es igual al agregado de los diámetros EG, FH, CD, &c. á la periferia cuyo diámetro es AB. La periferia cuyo diámetro es igual al agregado de dichos diámetros EG, FH, &c. es igual á las periferias cuyos diámetros son las mismas EG, FH, &c. (13) luego como BG á GA, así el agregado de las periferias cuyos diámetros son EG, FH, &c. con la periferia cuyo diámetro es AB. Y como (16, 6 Eucl.) el rectángulo ó producto de BG por la periferia del diámetro AB, que son los extremos, sea igual al rectángulo ó producto de GA, por el agregado de las periferias cuyos diámetros son FG, FH, &c. y este (14) sea igual á la superficie del sólido tornátil sobredicho, será el producto de BG por la periferia cuyo diámetro es AB, (que es la circular ABCD) igual á la superficie de dicho sólido.

PRO-

PROP. XVI. Teorema.

La superficie de la esfera es igual al producto ó rectángulo de la periferia de su círculo máxîmo y su diámetro. (fig. 10.)

Demonstracion. Si en el mismo círculo se considera inscrito un polígono de innumerables lados, la recta BC coincide con el diámetro AB, porque el lado AG se desvanece; y en este caso la superficie del sólido engendrado del movimiento del polígono de infinitos lados, será (15) igual al producto de la periferia circular ABCD por el diámetro AB. La superficie de dicho sólido es la superficie de la esfera; porque habiendo el polígono por la multitud de sus lados degenerado en círculo, el sólido que con su movimiento engendra, es la esfera: luego la superficie de la esfera es igual al producto ó rectángulo de la periferia de su círculo máxîmo y su diámetro.

PROP. XVII. Teorema.

La superficie de la esfera es quádrupla de su círculo máxîmo.

Demonstracion. La superficie de la esfera es igual (16) al rectángulo hecho de la periferia de su círculo máxîmo y el diámetro. La superficie del círculo máxîmo es igual (5, 7 de este trat.) al rectángulo hecho de su semiperiferia y de su semidiámetro: y como el rectángulo de toda la periferia y el diámetro, sea quádruplo del rectángulo de la semiperiferia y el semidiametro, se sigue ser la superficie de la esfera quádrupla de su círculo máxîmo. Que el rectángulo de la periferia y el diámetro sea quádruplo del de la semiperiferia y semidiámetro, consta de la *prop.* 20, *lib.* 6 de Eucl. Porque dichos rectángulos tienen razon duplicada de sus lados homólogos, que son el diámetro y semidiámetro; y teniendo estos razon dupla, tendrán sus rectángulos razon quádrupla.

Esta es la prop. 11 *del* libro 1 *de Arquimédes de* Sphæra & Cylindro, *que le mereció nombre inmortal entre los Geómetras.*

PRO-

PROP. XVIII. Teorema.

La superficie del cilindro circunscrito á la esfera, ménos las basas, es igual á la superficie de la esfera. (*fig.* 11.)

Demonstracion. La basa del cilindro AC circunscrito á la esfera, es igual al círculo máxîmo de la misma esfera, y su altura es el mismo diámetro EG ó DA: siendo pues la superficie, tanto del cilindro como de la esfera, igual al rectángulo de la periferia del círculo AGB, que es basa del cilindro, y máxîmo de la esfera por AD, que es altura del cilindro y diámetro de la esfera, serán la superficie del cilindro y de la esfera iguales, que es otro teorema nobilísimo de Arquimédes.

PROP. XIX. Teorema.

La superficie total del cilindro circunscrito á la esfera, es sesquiáltera con la superficie de la esfera.

Digo que la superficie total del cilindro circunscrito á la esfera; esto es, juntamente con sus dos basas, es sesquiáltera de la superficie de la esfera; es á saber, tiene con ella la razon de 3 á 2, ú de 6 á 4.

Demonstracion. (18) La superficie del cilindro sin sus basas es igual á la superficie de la esfera; esto es, (17) á quatro círculos máxîmos de la misma esfera: luego si añadimos las dos basas, que son dos círculos máxîmos, la superficie del cilindro con sus basas será 6, y la superficie de la esfera será 4: luego se han como 6 con 4, ó como 3 con 2, que es razon sesquiáltera.

PROP. XX. Teorema.

La superficie de un segmento esférico es igual al producto de la periferia del círculo máxîmo de la esfera, por la sagita del segmento. (*fig.* 10.)

Digo que la superficie del segmento esférico IAL es igual

igual al rectángulo hecho de la periferia del círculo máxîmo, y de la porcion ó sagita AR de dicho segmento.

Demonstracion. Si en el segmento IAL se inscribe el polígono parilátero regular, que se mueva al rededor del diámetro AB, se forma con dicho movimiento un sólido, cuya superficie sin la basa IL es (14) igual al rectángulo de uno de sus lados, como de AE, por todas las periferias de los círculos cuyos diámetros son EG, FH, &c. ménos la del último círculo cuyo diámetro es IL. Asimismo (15) el segmento IAL tiene su superficie, ménos la basa, igual al rectángulo de la recta BG y de la periferia del círculo cuyo diámetro es AR, que es la sagita de dicho segmento: luego (16) desvaneciéndose en el polígono de infinitos lados el lado AG, y coincidiendo la BG con el diámetro EB, será la superficie del segmento esférico IAL igual al rectángulo del diámetro AB y de la circunferencia del círculo cuyo diámetro fuere la sagita AR ; y como el producto de la periferia del círculo cuyo diámetro es AB; esto es, del círculo máxîmo de la esfera por el diámetro AR, sea (*corol.* de la *prop.* 13.) igual al producto de la periferia del círculo cuyo diámetro es AR por el diámetro AB de la esfera, será la superficie de dicho segmento esférico igual al producto de la periferia del círculo máxîmo de la esfera por la sagita del segmento.

PROP. XXI. Teorema.

Si tanto la esfera como el cilindro circunscrito, se cortan con un plano Z, (fig. 11.) serán la superficie del segmento esférico OEQ, y la del cilindro ZDCX iguales.

Demonstracion. La superficie del segmento esférico sobredicho es igual al rectángulo de la periferia del círculo máxîmo por la sagita EK. (20) La superficie del cilindro ZDCX es tambien igual al producto de la periferia del círculo máxîmo de la esfera, que es su basa, por la altura EK: luego son iguales.

CO-

COROLARIOS.

1 *Los planos paralelos ZX, FH cortan en la esfera y cilindro siempre superficies iguales; porque si de las superficies iguales del segmento esférico FEH y del cilindro FDCH se quitan las ZEX del segmento esférico y ZDCX del cilindro, las superficies residuas serán siempre iguales.*

2 *Si del cilindro AFHB circunscrito al emisferio FGH se quita el emisferio, quedará el cóncavo-convexô FGHBA, cuya superficie cóncava será igual á la convexâ sin la basa.*

PROP. XXII. Problema.

Medir la superficie de la esfera y de sus segmentos y sectores.

Para hallar la superficie de la esfera, se supondrá conocido el diámetro, y por él se sacará la circunferencia del círculo máxîmo, (3, *lib.* 7 de este tratado) y multiplicando el diámetro por la circunferencia hallada, se sabrá la superficie de la esfera. (16) Como si el diámetro es 50, será la circunferencia 157. Multiplíquese 157 por 50, y el producto será la superficie de la esfera.

Para hallar la superficie de un segmento de esfera, se medirá su altura, que es la sagita; y multiplicando el círculo máxîmo de la esfera cuyo es el segmento por dicha sagita, el producto será la superficie que se busca. (20)

Para medir la superficie de un sector de esfera como CABD, (*fig.* 12.) se medirâ primero del modo dicho la superficie del segmento ADB; y despues se medirá la superficie de la pirámide cónica AODC; (4) y la suma de entrambas cantidades será la superficie del sector.

PROP. XXIII. Teorema.

La esfera es igual á una pirámide cónica, cuya basa es igual á la superficie de la esfera, y su altura igual al radio.

Demonstracion. Considérese un polihedro circunscrito á la esfera, y del centro tírense rectas á todos los án-

ángulos, y quedará dicho polihedro resuelto en tantas pirámides, quantas tiene basas ó superficies el polihedro, cuyas alturas son al radio de la esfera, y las basas son las superficies del polihedro. A todas estas pirámides juntas es igual una pirámide, que tiene por altura el mismo radio de la esfera, y por basa una superficie igual á todas las basas juntas de dichas pirámides. Y es la razon, porque la pirámide total y las parciales, tienen una misma altura é igual basa, supuesto que la basa de la total es igual á las basas de todas las demas juntas.

Esto supuesto, cómo circunscribiéndole á la esfera polihedros de mas y mas lados infinitamente, vengan estos á degenerar en la esfera, viene la esfera á ser lo mismo que un polihedro de infinitos lados. Siendo pues qualquiera polihedro igual á una pirámide cónica cuya altura es el radio de la esfera inscrita, y su basa igual á la superficie del polihedro, tambien la esfera será igual á una pirámide cónica cuya altura es el radio de la esfera, y la basa la superficie esférica.

COROLARIOS.

1 *De lo dicho se sigue, que la esfera es igual á una pirámide cónica cuya altura es igual al radio de la misma esfera, y su basa es quádrupla del círculo máxîmo de la esfera.*

2 *El sector de la esfera es igual á una pirámide cónica cuya altura es el radio de la esfera, y su basa es igual á la superficie esférica del mismo sector; porque circunscribiéndole al sector un polihedro, se convencerá lo mismo que de toda la esfera.*

PROP. XXIV. Teorema.

El cilindro circunscrito á la esfera, es sesquiáltero de la misma esfera. (fig. 11.)

Sea el cilindro AC circunscrito á la esfera. Digo que es su solidez sesquiáltera de la solidez de la esfera; esto es, que si el cilindro es 3, la esfera es 2.

Demonstracion. Si sobre la basa circular AB del cilindro se forma la pirámide cónica APB cuyo vértice está en

P centro de la esfera, la dicha pirámide cónica será la quarta parte de la esfera, por ser su basa la quarta parte de la basa de la pirámide cónica, que probé en la *prop.* 23 ser igual á la esfera, y tener la misma altura. (11, 12 Eucl.) Esta misma pirámide cónica APB, es la sexta parte del cilindro AD, por ser (10, 12 Eucl.) el tercio de su mitad AFHB: luego el cilindro incluye justamente seis de las dichas pirámides, y la esfera quatro: luego el cilindro AC á la esfera inscrita, es como 6 con 4, ó como 3 con 2, que es razon sesquiáltera: luego el cilindro circunscrito á la esfera es sesquiáltero de ella, tanto en la superficie (como probé en la *prop.* 19) como en la solidez. Y este es el ilustre teorema hallado por Arquimédes, que mandó se insculpiese en el mármol de su sepulcro.

PROP. XXV. Problema.

Medir la solidez de la esfera y de sus sectores y segmentos.

1 La solidez ó área de la esfera, se hallará en la forma siguiente. Mídase (22) la superficie de la esfera: multiplíquese esta superficie por la tercera parte del radio; y el producto será la área ó solidez que se busca.

Demonstracion. La esfera es igual á una pirámide cónica cuya altura es el radio, y la basa es la superficie de la misma esfera. (23) La solidez de esta pirámide se halla del modo dicho: (3) luego tambien la de la esfera.

2 La área ó solidez del sector esférico (*fig.* 12.) se sabrá multiplicando la superficie del segmento esférico ABD por el tercio del radio BC. La razon es, porque el sector de la esfera (*corol.* 2, *prop.* 23) es igual á una pirámide cónica cuya altura es el radio de la esfera, y la basa es igual á la superficie esférica de dicho sector. Esta pirámide se mide del modo sobredicho: luego tambien el sector.

3 La solidez ó área del segmento esférico ABDA se halla midiendo el sector CABD y la pirámide cónica ADC; y restando esta del sector, quedará la solidez del segmento. De aquí se puede colegir el modo de hallar la solidez de una zona esférica.

PRO-

PROPOSICION XXVI.

Medir la esferoyde y conoyde.

Esferoyde, es un sólido que se engendra de la circunvolucion de una elipse al rededor de su exe. Y porque la elipse tiene dos exes, uno mayor y otro menor, hay tambien dos especies de esferoyde, una *longa* y otra *lata*. *La esferoyde longa, es la que nace de la circunvolucion de una elipse al rededor de su exe mayor*; y viene á ser como una ciruela. *La esferoyde lata, es la que se origina de la circunvolucion de la elipse al rededor de su exe menor*; y es como una esfera algo allanada.

Conoyde, es un sólido producido de la circunvolucion de una parábola ó hipérbola al rededor de su exe; aunque tambien puede proceder de la revolucion de un segmento de elipse al rededor de su exe. Para cuya inteligencia se ha de suponer, que la *elipse*, *parábola* é *hipérbola* nacen de las secciones de una pirámide cónica como ABD. (*fig.* 13.) Si la seccion fuere paralela á la basa AB, seria *círculo*: si la seccion es obliqüa, y llega á cortar entrambos lados como EC, es *elipse*: si corta solo un lado y es paralela al otro como OSQ, es *parábola*: y si corta solo un lado y no es paralela al otro como IRP, es *hipérbola*.

1 La solidez de la esferoyde, tanto longa como lata, se hallará así. Multiplíquese la área del círculo cuyo diámetro se movió para la produccion de la esferoyde por dos tercios del diámetro que sin moverse sirvió de exe, y el producto será la área ó solidez que se busca.

Exemplo. (*fig.* 14.) Búscase la solidez de la esferoyde longa ABDC, cuyo diámetro inmoto AD que sirvió de exe, sea 20, y el menor diámetro que se movió BC, sea 15, cuyo círculo será 176 $\frac{5}{8}$ avos. Multiplíquese este por 13 y $\frac{1}{3}$, que son los dos tercios del diámetro AD 20, y el producto 2355 será la solidez de la esferoyde.

La razon es, porque como se colige de la *prop.* 23 de Arquim. de *Sphæroyde & Conoyde*, la esferoyde longa

 tie-

tiene con la esfera del mayor diámetro razon duplicada del menor al mayor diámetro; esto es, tiene la misma razon, que el círculo del menor diámetro al círculo del mayor. Esto supuesto, sea FAE el emisferio sobre el diámetro mayor FE ó AD: sea FGHE el cilindro, cuya basa es la misma del emisferio, y cuya altura sea dos tercios del semidiámetro mayor de la esferoyde ó radio del emisferio: sea BOIC otro cilindro de la misma altura; pero su basa sea el círculo del menor diámetro de la esferoyde.

Por tener estos dos cilindros una misma altura, son como sus basas. Estas basas (que son los círculos del mayor y menor diámetro de la esferoyde) son entre sí como la semiesferoyde al emisferio, segun Arquimédes: luego dichos cilindros son como la semiesferoyde al emisferio: siendo pues el cilindro FGHE igual al emisferio, por tener este dos tercios del cilindro circunscrito á dicho emisferio, el qual es tambien dos tercios del mismo cilindro, por tener con él razon subsesquiáltera: (24) luego tambien el cilindro BOIC es igual á la semiesferoyde longa, y su duplo igual á toda la dicha esferoyde. Midiéndose pues el cilindro por la multiplicacion de su basa por la altura; esto es, la área del círculo BC por los dos tercios del diámetro, tambien se medirá del mismo modo la esferoyde.

2 Pídese ahora se mida la solidez de la esferoyde lata, cuyo diámetro movido, que es el mayor, sea 20, y el menor sea 15. Hállese la área del círculo cuyo diámetro es 20, y será 314. Multiplíquese por 10, que son los dos tercios de 15, y el producto 3140 será la área que se busca. La demonstracion viene á ser como la pasada; porque la esferoyde lata con la esfera del menor diámetro, tiene la misma razon, que el círculo del mayor diámetro al círculo del menor.

Aquí se ha de advertir, que la esfera del mayor diámetro, la esferoyde lata, la esferoyde longa y la esfera del menor diámetro, son continuas proporcionales, y tienen entre sí la misma razon que hay del mayor al menor diámetro, miéntras que entrambas esferoydes nazcan

de

de una misma elipse; y así 4186 ¾ avos, 3140, 2355; 1766 y ¼, tienen continuada la razon de 20 con 15.

3 La solidez de un segmento de esferoyde cortado con un plano perpendicular al exe, se medirá como se sigue. Se ha de medir el segmento VAP: (*fig.* 14.) mídase la recta VP, y las partes AZ, ZD del exe AD. Búsquese la área del círculo cuyo diámetro es VP: multiplíquese esta área por el tercio del segmento AZ del exe AD, y resultará una pirámide cónica cuya basa es el círculo del diámetro VP, y su altura la porcion ZA. Y porque, segun Arquimédes en la *prop.* 31 de *Sphæroyde & Conoyde*, tiene dicha pirámide cónica con la porcion menor de la esferoyde la razon que la mayor porcion del exe ZD con la suma de las rectas XD, ZD, hágase esta regla de tres: como ZD segmento mayor del exe, con la suma de las rectas XD, ZD, esto es, del semidiámetro mayor, y del exe de la porcion mayor; así dicha pirámide cónica á la solidez del segmento menor VAP.

Si se busca el segmento mayor VDP, hállese la pirámide cónica cuya basa es el círculo del diámetro VP, y su altura ZD; y hágase como ZA segmento menor del exe, con la suma de las rectas XA, ZA; así dicha pirámide cónica con la área del mayor segmento VDP. De aquí se colige el modo de medir la porcion VBCP de la esferoyde.

4 Pídese se mida la conoyde parabólica ABD. (*fig.* 15.) Mídase la pirámide cónica cuya basa sea el círculo del diámetro AD, y su altura BC, y hágase como 2 con 3, así dicha pirámide con la conoyde que se busca. La razon es, porque segun Arquimédes *prop.* 23 de *Sphæroyde & Conoyde*, dicha pirámide cónica es subsesquiáltera de la conoyde recta; esto es, como 2 á 3: luego, &c.

5 La solidez de la conoyde hiperbólica se halla así: Supóngase, que la figura misma es hipérbola recta, y que E es la mitad del diámetro transverso entre dos hipérbolas opuestas: y porque Arquimédes en la 27 de *Sphær. & Con.* demuestra, que la conoyde hiperbólica ABD, con la pirámide cónica cuya basa es la misma de la conoyde, ó cuyo diámetro es AD y el mismo exe BC, tiene la mis-

ma

ma razon, que la línea compuesta del exe BC y del triplo E, con la línea compuesta del exe BC y de la dupla de E; se sigue, que si se hace esta regla de tres, como la compuesta de BC y la dupla de E, con la compuesta de BC y la tripla de E; así la dicha pirámide con la área de la conoyde hiperbólica ABD, se hallará la solidez que se pide. En el tratado de *Secciones cónicas* se dará mas entera noticia de estos sólidos.

De lo dicho se colige el modo de medir los cuerpos irregulares, procurándoles reducir en quanto sea posible, á los regulares referidos, lo que se dexa á la industria y solicitud del Geómetra, por no alargar mas este tratado.

APEN-

APÉNDICE.

HAbiendo concluido este tratado, me pareció ser muy conveniente añadir aquí una breve suma de reglas Geométricas, tan breves y fáciles, que los Arquitectos, sin ser Geómetras, puedan con ellas fácilmente medir, reducir, aumentar y disminuir qualquier género de figuras, tanto planas como sólidas, como tengan una mediana noticia de la Aritmética.

CÍRCULO.

1 *Como* 10000 *á* 62832, *así el radio á la circunferencia.*
2 *Como* 10000 *á* 1592, *así la circunferencia al radio.*

Exemplo 1. Un círculo tiene 8 palmos de radio: pídese la circunferencia. Hago esta regla de tres: Si 10000 dan 62832, ¿qué dará 8? y hallo 50 y $\frac{2656}{10000}$.

Exemplo 2. Un círculo tiene 60 palmos de circunferencia, pídese el radio. Digo: Si 10000 dan 1592, ¿qué darán 60? y hallo 9 y $\frac{5520}{10000}$.

FIGURAS INSCRITAS Y CIRCUNSCRITAS.

	Figuras.		Círculo.	
	Inscritas.	Circunscritas.	Inscrito.	Circunscrito.
Triángulo.	17320.	34640.	2887.	5773.
Quadrado.	14142.	20000.	5000.	7071.
Pentágono.	11756.	14530.	6882.	8507.
Exágono.	10000.	11547.	8660.	10000.
Sieteavo.	8678.	9630.	10384.	11524.
Ochavo.	7654.	8284.	12071.	13066.
Nonavo.	6840.	7297.	13704.	14619.
Diezavo.	6180.	6498.	15388.	16180.
Dozavo.	5176.	5358.	18660.	19319.

Da-

Dado el círculo, hallar las figuras.

3 *Regla* 1. *Dado el círculo, hallar las figuras inscritas. Como* 10000 *al número correspondiente á la figura inscrita en la Tabla, así el radio dado del círculo al lado de la figura.*

Exemplo. Un círculo tiene 6 palmos de radio ó semidiámetro: pídese el lado del pentágono inscrito. Digo: Si 10000 dan 11756, ¿qué darán 6? y se hallan 7 y $\frac{536}{10000}$ partes de palmo.

4 *Regla* 2. *Dado el círculo, hallar las figuras circunscritas. Como* 10000 *al número correspondiente á la figura en las circunscritas, así el radio dado al lado de la figura.*

Exemplo. Un círculo tiene 6 palmos de radio: pídese el lado del pentágono circunscrito. Si 10000 dan 14530, ¿qué darán 6, y hallo 8 y $\frac{7180}{10000}$.

Dadas las figuras, hallar el círculo.

5 *Regla. Como* 10000 *al número de la Tabla correspondiente á la figura, así el lado dado de la figura al radio ó semidiámetro del círculo.*

Exemplo 1. Un triángulo equilátero tiene 9 palmos de lado: pídese el círculo inscrito. Digo: Si 10000 dan 2887, ¿qué darán 9? y darán 2 palmos y $\frac{5983}{10000}$.

Exemplo 2. Un pentágono tiene de lado 5 palmos: pídese el círculo circunscrito. Digo: Si 10000 dan 8507, ¿qué darán 5? y hallo dan 4 palmos y $\frac{2535}{10000}$.

3. SUPERFICIES DE LAS FIGURAS.

	Dado el lado, hallar la superficie.	Dada la circunferencia, hallar la superficie.	Dada la superficie, hallar el lado.	Dada la superficie, hallar la circunferencia.
Triángulo.	4330.	481.	15186.	207845.
Quadrado.	10000.	625.	10000.	160000.
Pentágono.	17205.	688.	5812.	145308.
Exágono.	25981.	722.	3849.	138568.
Sieteavo.	36339.	742.	2752.	134844.
Ochavo.	48284.	754.	2071.	132549.
Nonavo.	61818.	763.	1618.	131028.
Diezavo.	76942.	769.	1300.	129969.
Dozavo.	111961.	778.	893.	128619.
Círculo.	31416.	796.	3183.	125689.

Dado el lado, hallar la superficie.

6 *Regla. Como* 10000 *al número de la primer columna, así el quadrado del lado á la superficie de la figura.*

Exemplo. Un pentágono tiene 6 palmos de lado: pídese la superficie. Hágase la regla de tres: Si 10000 dan 17205, ¿qué darán 36, que es el quadrado de 6? y se hallan 61 palmo y $\frac{938}{10000}$.

Dada la circunferencia, hallar la superficie.

7 *Regla. Como* 10000 *al número de la segunda columna, así el quadrado de la circunferencia á la superficie de la figura.*

Exemplo. La circunferencia de un exágono tiene 24 palmos: pídese su superficie. El quadrado de 24 es 576. Digo pues: Si 10000 dan 722, ¿qué darán 576? y se hallan 41 palmo y $\frac{5872}{10000}$.

Dada la superficie, hallar el lado.

8 *Regla. Como* 10000 *al número de la tercer columna, así la superficie dada al quadrado del lado que se pide.*

Exem-

Exemplo. La superficie de un pentágono tiene 60 palmos : pídese su lado. Digo: Si 10000 dan 5812, ¿qué darán 60? y salen 34 palmos y $\frac{8720}{10000}$, cuya raiz quadrada es casi $5\frac{1}{2}$, y éste es el lado.

Dada la superficie, hallar la circunferencia.

9 *Regla. Como* 10000 *al número de la quarta coluna, así la superficie dada al quadrado de la circunferencia.*

La superficie de un círculo es de 36 palmos : pídese su circunferencia. Dígase: Si 10000 dan 125689, ¿qué darán 36? y hallo 452 palmos y $\frac{4804}{10000}$, quadrado de la circunferencia: luego su raiz quadrada, que es 21 y cerca de medio, es la circunferencia.

Reducir unas figuras á otras.

Reducir una figura á otra, consiste en hallar otra de diferente especie, que tenga ó igual superficie, ó igual circunferencia.

Reducir una figura á otra de igual circunferencia.

10 *Regla. Multiplíquese el lado dado de la figura por el número de sus lados, y el producto pártase por el número de los lados de la otra, y el quociente será el lado de la figura que se pide.*

Exemplo. Un exágono tiene 9 palmos de lado; pídese un triángulo equilátero de igual circunferencia. Porque el exágono tiene 6 lados, multiplico 9 por 6, y el producto 54 partido por 3, que son los lados del triángulo, da el quociente 18, y este es el lado del triángulo.

11 Si se pidiese un círculo de igual circunferencia á la de dicho exágono, se tomaria el producto 54 por circunferencia, y se hallaria el radio por la regla arriba puesta del círculo, *num.* 1.

Si se diese el radio del círculo, se buscaria su circunferencia por la regla puesta en el lugar citado; y esta se partiria por 4 para hallar un quadrado, ó por 5 para hallar un pentágono, &c.

Reducir una figura á otra de igual superficie.

12 *Regla. Dado el lado ó circunferencia de una figu-*

gura, se hallará su superficie por la regla número 6. *Con esta superficie se hallará el lado de la nueva figura por la regla* número 8, *y quedará resuelto el problema.*

Exemplo. Un quadrado tiene 8 palmos de lado: pídese un círculo de igual superficie. Por la regla del *número* 6 será la superficie del quadrado 64: luego por la regla *número* 8, digo: si 10000 dan 3183, ¿qué darán 64? y salen 20 y $\frac{3712}{10000}$, cuya raiz quadrada, que es algo mas de 4, es el radio del círculo que se pide.

Aumentar ó disminuir las figuras.

13 *Regla. Los términos de la proporcion dada son proporcionales con los quadrados de los lados de las figuras semejantes, y así se procederá como en los exemplos siguientes.*

Exemplo 1. Una figura (qualquiera que sea) tiene de lado 8 palmos, y quiere aumentarse de manera, que la superficie de la primera á la segunda sea como 2 á 3. El quadrado de 8 es 64. Digo: Si 2 dan 3, ¿qué darán 64? y sale 96, que es el quadrado del nuevo lado: luego la raiz quadrada de 96, que es casi 10, es el lado de la figura que se pide.

Exemplo 2. Un círculo tiene 8 palmos de radio: quiérese disminuir de tal suerte, que el primero al segundo sea como 16 á 9. El quadrado de 8 es 64. Digo pues: Si 16 dan 9, ¿qué darán 64? y salen 36, cuya raiz quadrada 6 es el radio del círculo que se busca.

14 *Si la figura no fuere de lados iguales, se hallará primeramente el un lado como ántes:* 2. *se hallarán los otros lados por regla de tres.*

Exemplo. Un triángulo tiene un lado de 6 palmos, el otro de 4, y el otro de 5: quiérese aumentar en proporcion de 9 á 16. Tomo el un lado 6, su quadrado es 36, y hago la regla de tres: Si 9 dan 16, ¿qué darán 36? y sale 64, cuya raiz quadrada es 8, y este será un lado del nuevo triángulo. Busco despues los otros lados por regla de tres, diciendo: Si 6 dan 4, luego 8 darán 5 $\frac{1}{3}$ el lado segundo. Otra vez: Si 6 dan 5, luego

8

8 darán 6 $\frac{2}{3}$ lado tercero; y así en las demas figuras de lados desiguales.

Sólidos inscritos y circunscritos á la esfera.

	Dada la esfera, hallar el sólido.		Dado el sólido, hallar la esfera.	
	Inscrito.	Circunscrito.	Inscrita.	Circunscrita.
Tetraedro	16330.	48990.	2041.	6124.
Cubo	11547.	20000.	5000.	8660.
Octaedro	14142.	24495.	4082.	7071.
Dodecaedro	7136.	8981.	11135.	14012.
Icosaedro	10515.	13232.	7558.	9511.

Dada la esfera, hallar los sólidos.

15 *Regla. Hágase como* 10000 *al número correspondiente en la* Tabla I, *así el radio de la esfera dada, al lado del sólido inscrito ó circunscrito.*

Exemplo 1. Tiene una esfera 10 palmos de radio: pídese el tetraedro inscrito dentro de la esfera. Digo: Si 10000 dan 16330, ¿qué darán 10? y salen 16 y $\frac{3300}{10000}$.

Exemplo 2. Pídese el cubo circunscrito á la sobredicha esfera. Digo: Si 10000 dan 20000, ¿qué darán 10? y salen 20 palmos.

Dados los sólidos, hallar las esferas.

16 *Regla. Como* 10000 *al número de la* Tabla II, *así el lado del sólido al radio de la esfera inscrita ó circunscrita.*

Exemplo. Un octaedro tiene 5 palmos de lado: pídese la esfera inscrita. Si 10000 dan 4082, ¿qué darán 5? y salen 2 y $\frac{410}{10000}$. En el mismo caso se pide de la esfera circunscrita. Dígase: Si 10000 dan 7071, ¿qué darán 5? y salen 3 y $\frac{5355}{10000}$.

Su–

Superficie y solidez de los cuerpos.

	Dado el lado, hallar la superficie.	Dada la superficie, hallar el lado.	Dado el lado, hallar la solidez.	Dada la solidez, hallar el lado.
Tetraedro	17320.	5774.	1178.	84851.
Cubo	60000.	1667.	10000.	10000.
Octaedro	34640.	2887.	4714.	21213.
Dodecaedro	206457.	484.	76631.	1305.
Icosaedro	86600.	1154.	21817.	4583.
Esfera	125664.	796.	41888.	2387.

Dado el lado, hallar la superficie.

17 *Regla. Como* 10000 *al número de la* coluna 1, *así el quadrado del lado á la superficie del cuerpo.*

Exemplo. Una esfera tiene 5 palmos de radio: pídese la superficie. Dígase: Como 10000 á 125664, así 25 quadrado de 5, á 314 palmos y $\frac{1500}{10000}$ de un palmo; y esta es la superficie de la esfera.

Dada la superficie, hallar el lado.

18 *Regla. Como* 10000 *al número de la* coluna 2, *así la superficie dada al quadrado del lado del sólido que se pide.*

Exemplo. Un cubo tiene 96 palmos de superficie: pídese el lado. Digo: Si 10000 dan 1667, ¿qué darán 96? y salen 16, cuya raiz 4 es el lado del cubo que se pide.

Dado el lado, hallar la solidez.

19 *Regla. Como* 10000 *al número de la* 3 coluna, *así el cubo del lado dado á la solidez del cuerpo que se pide.*

Exemplo. Un octaedro tiene 10 palmos de lado: pídese su solidez; su cubo es 1000. Digo: Si 10000 dan 4714, ¿qué darán 1000? y se hallan 471 y $\frac{4000}{10000}$; y esta es la solidez.

Dada la solidez, hallar el lado.

20 *Regla. Como* 10000 *al número de la* coluna 4, *así la solidez dada al cubo del lado que se busca del cuerpo.*

Exem-

Exemplo. Tiene una esfera 115 palmos de solidez: pídese el radio. Dígase: Si 10000 dan 2387, ¿qué darán 115? y se hallan 27 y $\frac{4505}{10000}$, cubo del lado; su raiz cúbica 3 es con poca diferencia el radio de la esfera.

Reducir un cuerpo á otro de igual superficie.

21 *Regla* 1. *Hállese la superficie del cuerpo dado por el* número 17. 2. *Con aquella superficie hállese el lado del nuevo cuerpo por el* número 18, *y quedará resuelto el problema.*

Exemplo. Un cubo tiene 6 palmos de lado: pídese una esfera de igual superficie á la de dicho cubo. La superficie del cubo es 216. Dígase ahora: Si 10000 dan 796, ¿qué darán 216? y salen 17 y $\frac{1936}{10000}$, cuya raiz quadrada es poco mas de 4; y este es el radio de *la* esfera de igual superficie á la del cubo.

Reducir un cuerpo á otro de igual solidez.

22 *Regla* 1. *Hállese la solidez del cuerpo dado* número 19. 2. *Con esta solidez se hallará el lado del nuevo cuerpo por el* número 20.

Aumentar ú disminuir la solidez de los cuerpos.

Regla. Los términos de la proporcion dada son proporcionales con los cubos de los lados de los cuerpos. Con esto se formará la regla de tres, como en el siguiente.

Exemplo. Un cubo tiene 10 palmos de lado: quiero aumentarle de suerte, que la solidez del primero á la del segundo, sea como 2 á 3. El cubo de 10 es 1000. Formo pues la regla de tres, diciendo: Si 2 dan 3, ¿qué darán 1000? y salen 1500, cuya raiz cúbica es 11 $\frac{44}{100}$, lado del nuevo cuerpo, qualquier que sea. Si la proporcion dada fuere de las superficies, se obrará como en el *número* 13. Si el cuerpo fuere de lados desiguales, se hallará un lado por la regla dada; y los demas se sacarán por regla de tres, como en el *número* 14.

Re-

Reglas para los Artífices.

Los Artífices para determinar el justo precio de sus obras, deben atender á la materia y al trabajo. *Los precios del trabajo guardan la proporcion que los quadrados de los lados, quando solo se trabaja la superficie.* Pero *los precios de la materia guardan la proporcion de los cubos de los lados.*

Exemplo. Una lámpara de plata, que tiene 2 palmos de diámetro, vale de manos 24 pesos: otra de 4 palmos de diámetro, que guarde en todo la misma proporcion, ¿qué costará de manos? Para formar la regla de tres, tomo los quadrados de 2 y 4, que son 4 y 16, y digo: Si 4 dan 16, ¿qué darán 24? y salen 96 pesos. Si la primera tiene 60 onzas de plata, ¿qué tendrá la segunda? Para formar esta regla de tres, tomo los cubos de 2 y de 4, que son 8 y 64, y digo: Si 8 dan 64, ¿qué darán 60 onzas? y salen 480 onzas. De esta regla han de usar todos los Artífices que ponen el material y labran la superficie solamente.

Pero si se labra tambien lo interior y macizo de la obra, como en las paredes y torres de ladrillo, se habrá de sacar el precio del trabajo, formando la regla de tres por los cubos, como para sacar la cantidad de la materia. Y al reves los Doradores, que solo ponen el material en la superficie, deben sacar el valor de la materia de la misma suerte que se saca el valor de las hechuras, formando la regla de tres por los quadrados de los lados.

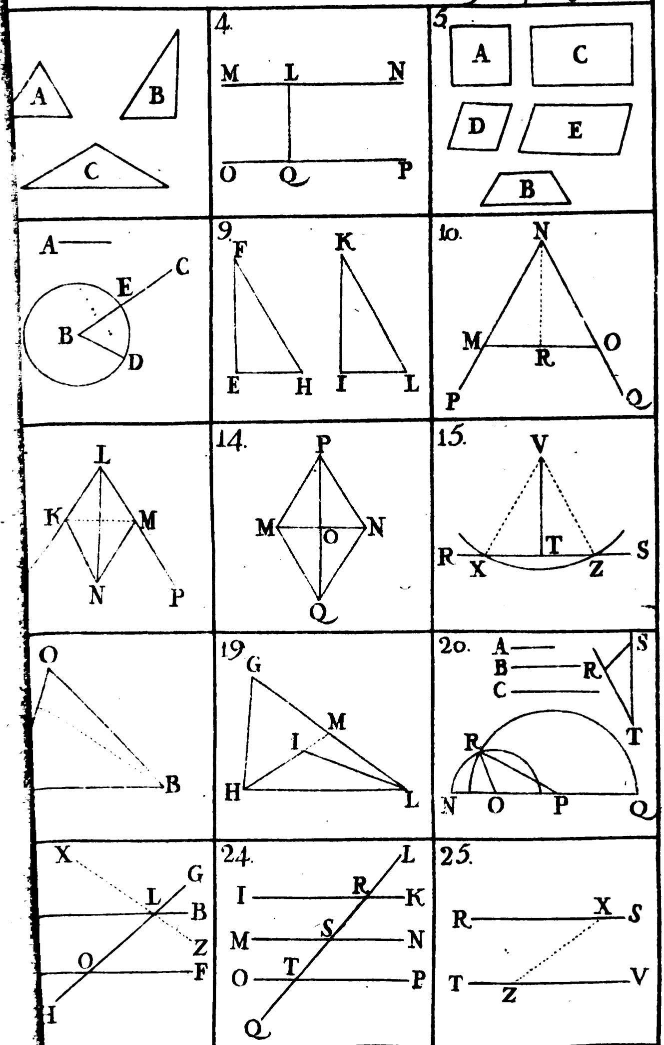
Exemplo. Un retablo que tiene 20 palmos de ancho, se dora por 300 libras; otro de la misma forma, que tiene 30 palmos de ancho, ¿por quánto se dorará? Para resolver la regla de tres, me valgo de los quadrados de 20 y 30, que son 400 y 900. Y digo: Si 400 dan 900, ¿qué darán 300 libras? y se hallan 675 libras. Para sacar la cantidad de oro que entrará, hago la misma regla de tres; y suponiendo por exemplo, que en el primero entran 8000 panecillos de oro, digo: Si 400 dan 900, ¿qué darán 8000? y salen 18000 panecillos.

Es-

Esto se debe entender, quando hay total semejanza en la obra; porque el precio puede ser mayor ó menor de lo que sale por esta regla por muchas causas, como por haber mas ó ménos talla ó relieve, ó por la mayor ó menor perfeccion de la obra, para lo qual no se puede dar regla cierta.

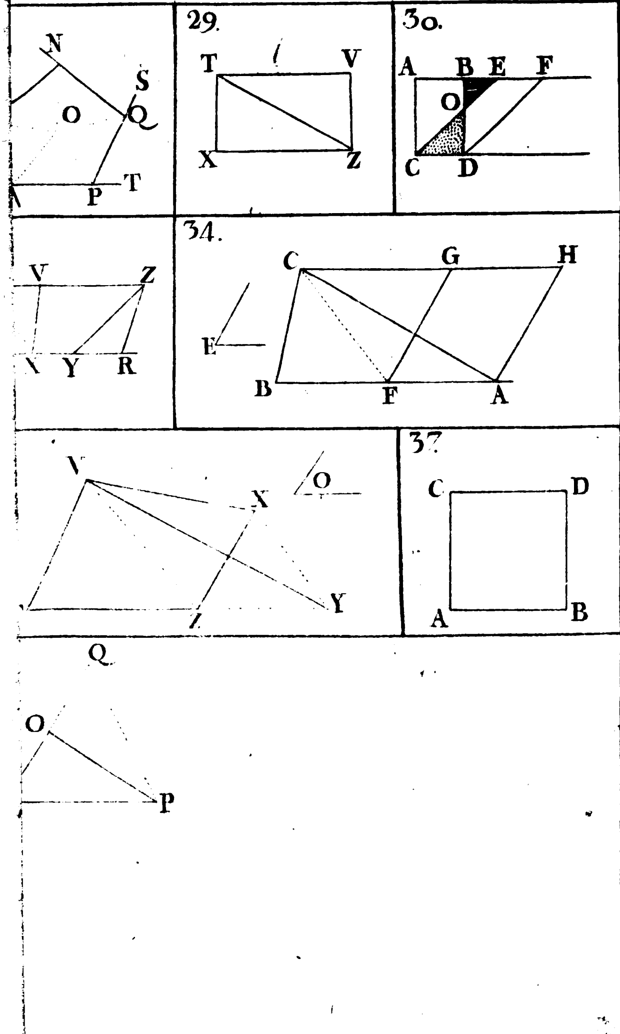
FIN.

Estampa 1. Fol. 32.



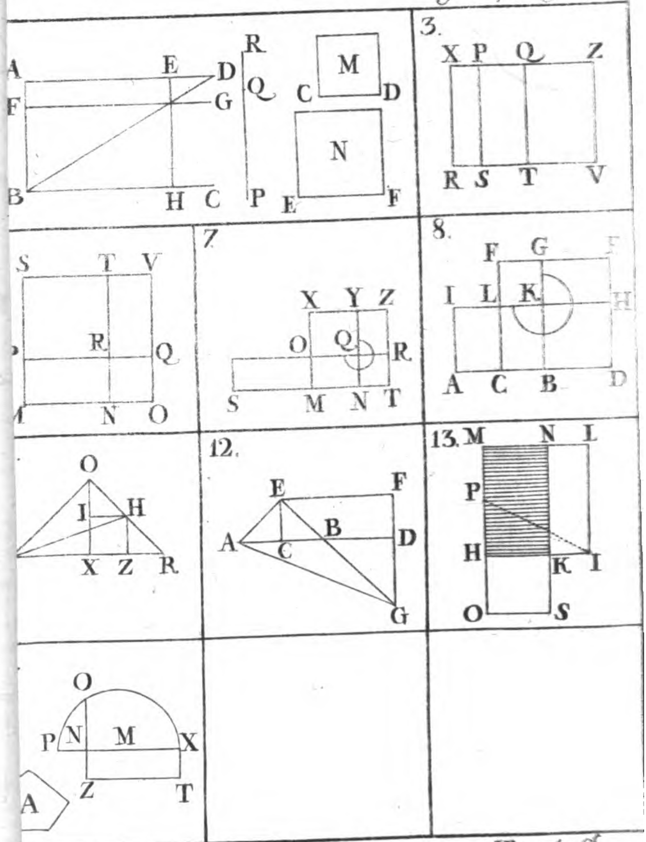
H. Ricarte sculp.

Estampa 2. fol. 40.

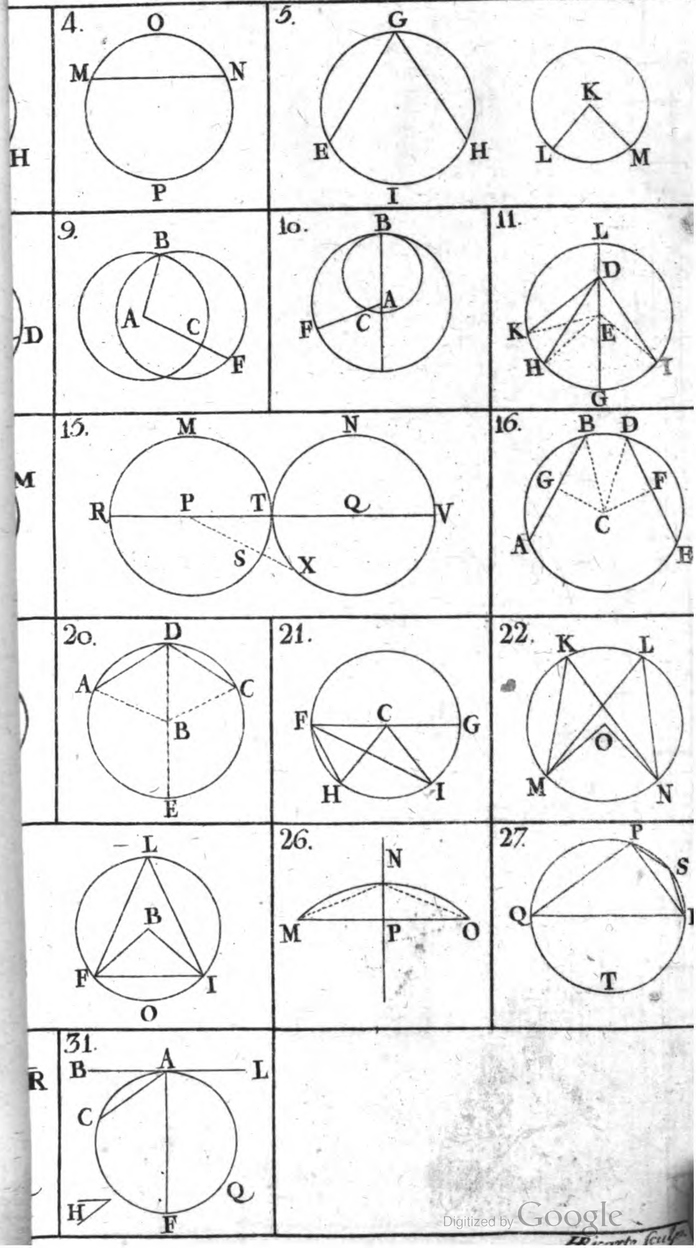


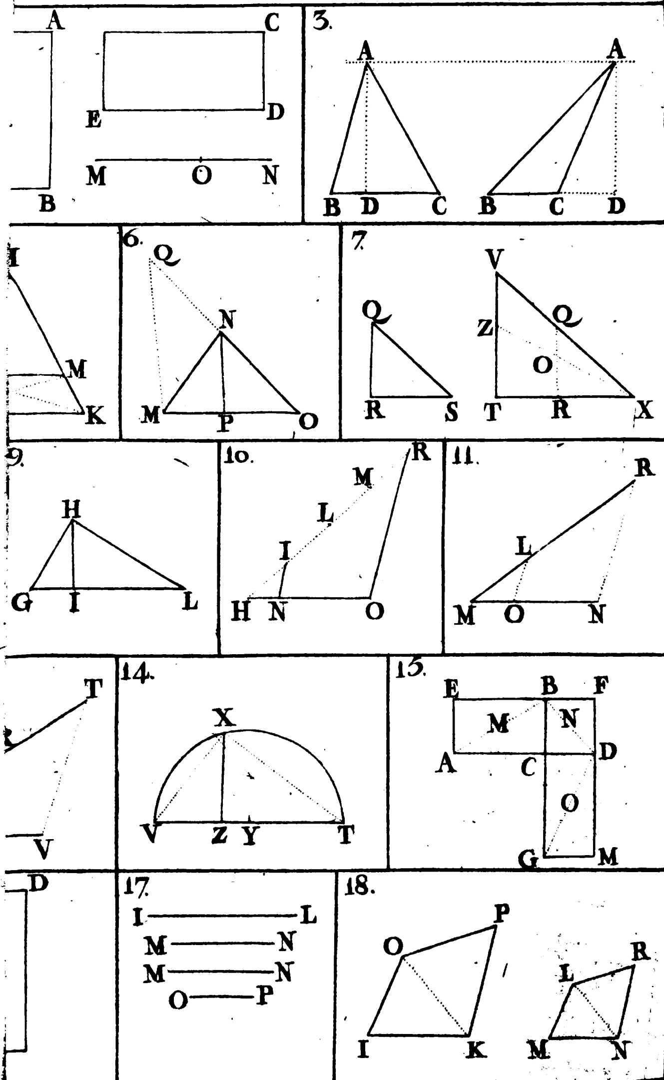
HRicarte sculp.

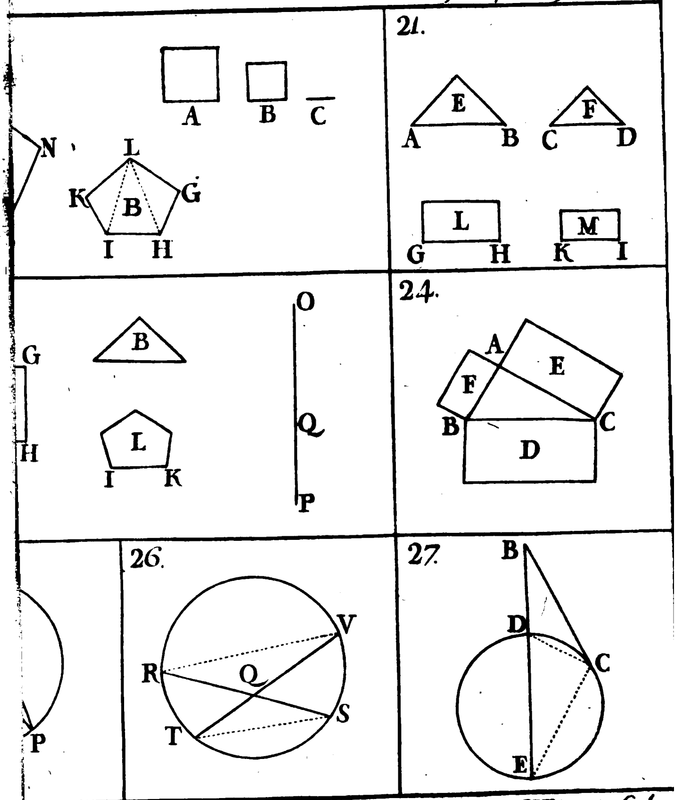
Estampa 3, fol. 50.



J.Ricarte f.t

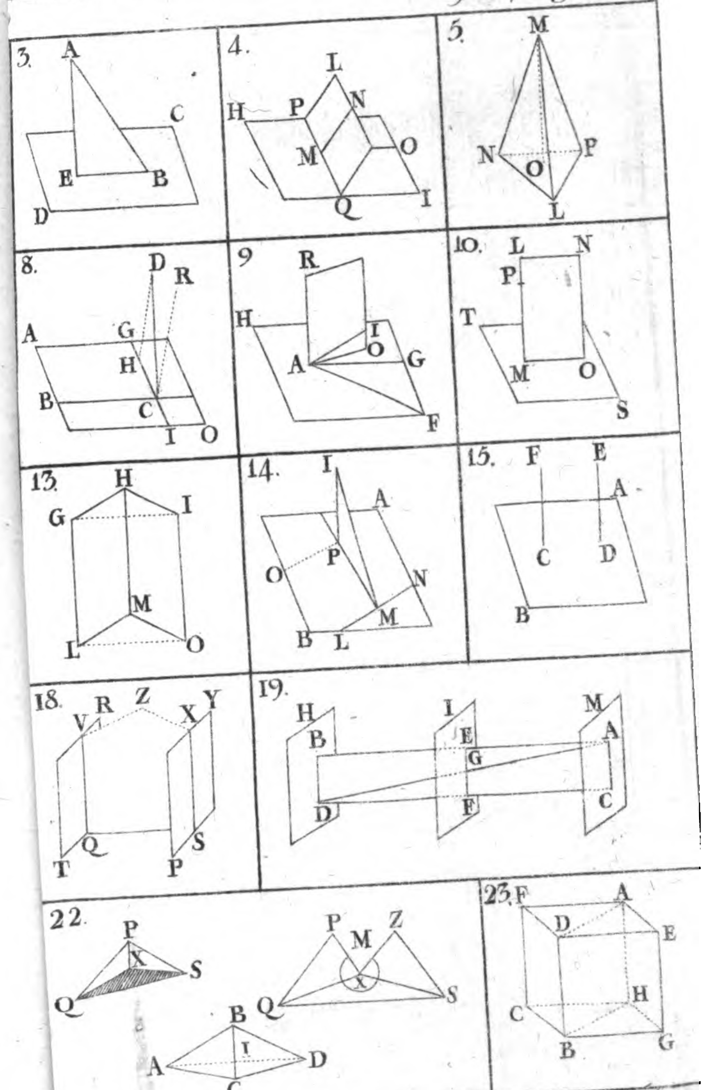

4.
O
M N
P
5.
G
K
E H
L M
I
9.
B
A C
F
10.
B
A
F C
11.
L
D
K E
H I
G
15.
M N
R P T Q V
S X
16.
B D
G F
C
A E
20.
D
A C
B
E
21.
C
F G
H I
22.
K L
O
M N
L
B
F I
O
26.
N
M P O
27.
P
S
Q
T
31.
B A L
C
Q
H
F


A C E D B M O N
3.
A A B D C B C D
I M K
6.
Q N M P O
7.
Q R S V Z Q O T R X
9.
H G I L
10.
R M L I H N O
11.
R L M O N
T V
14.
X V Z Y T
15.
E B F M N A C D O G M
D
17.
I L
M N
M N
O P
18.
P O I K R L M N



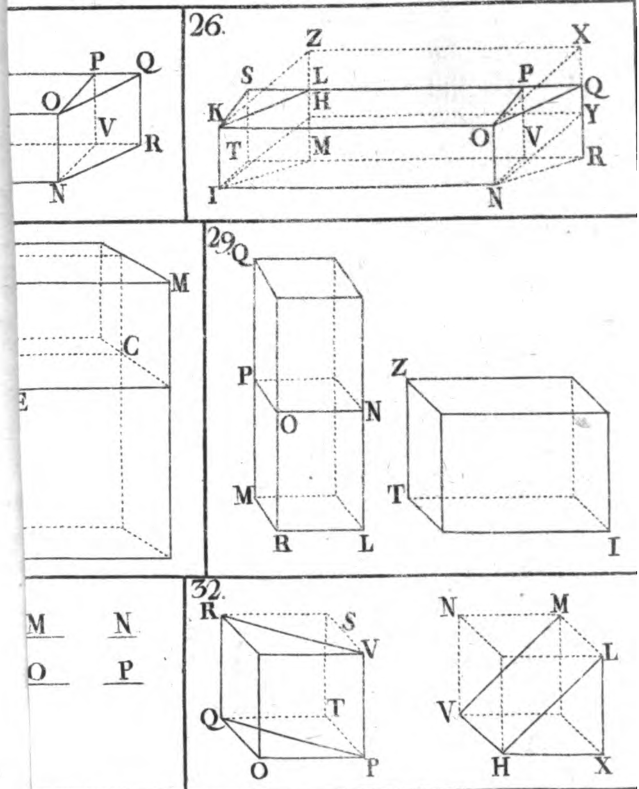
H. Ricarte sculp.

Estampa 7. fol. 116.

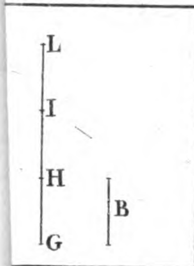


J. Ricarte sculp.

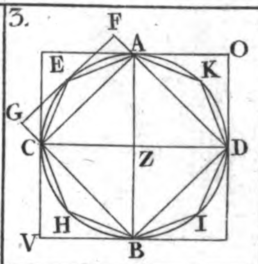
Estampa 8 fol. 122.



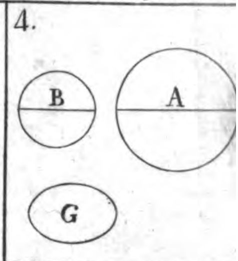
H Ricarte sculp.

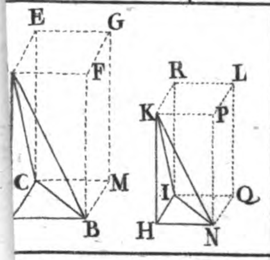


3.

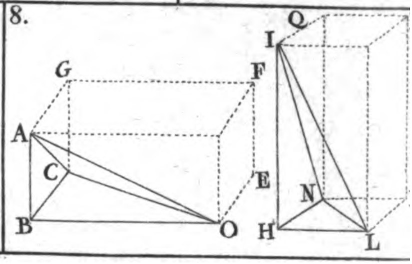


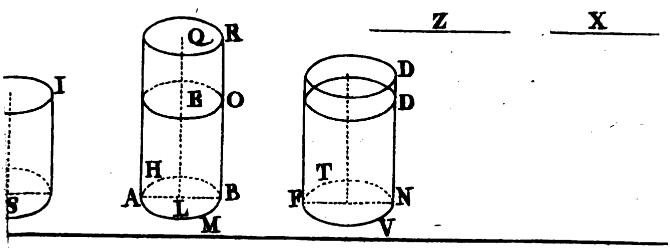
4.

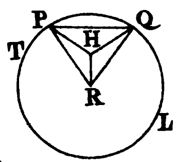




8.

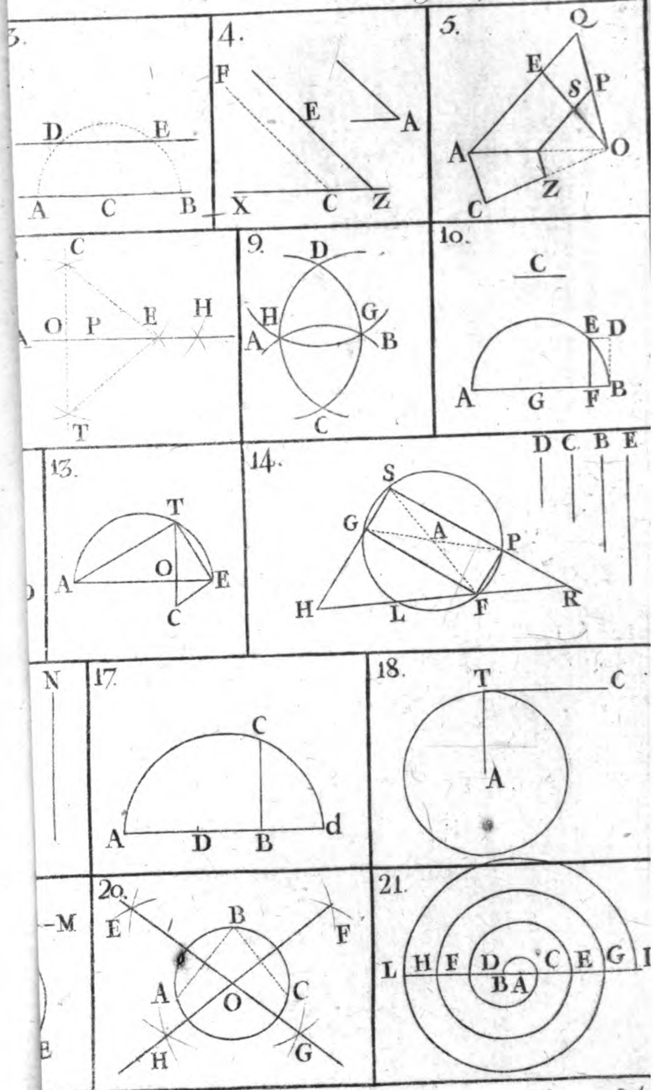




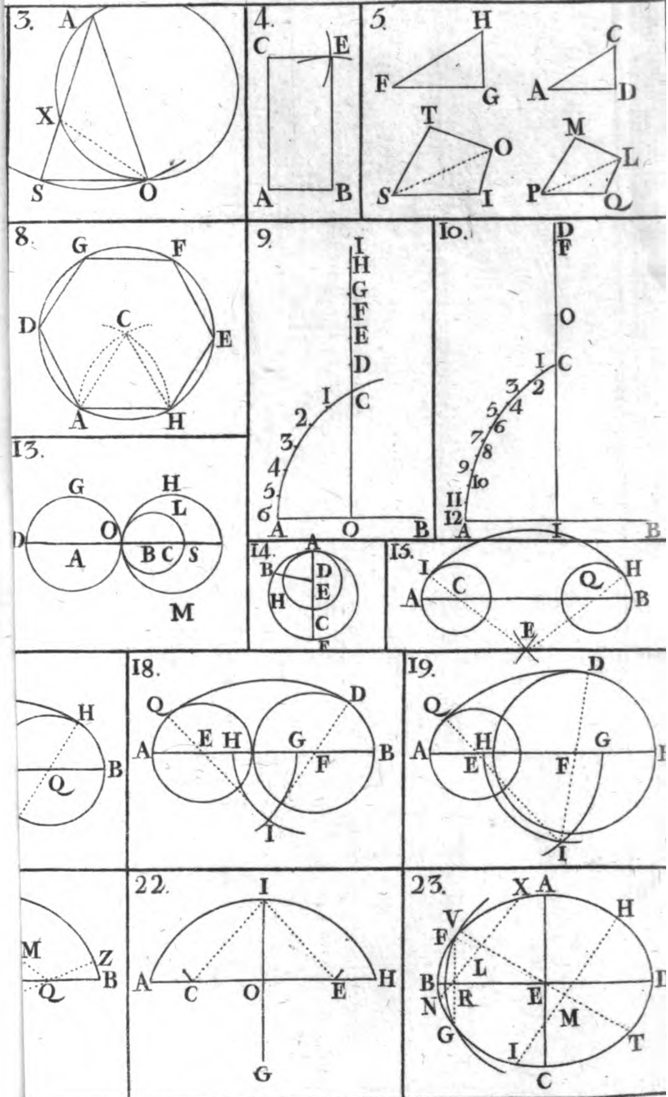


Ricarte sculp.

Estampa 1. fol. 284.

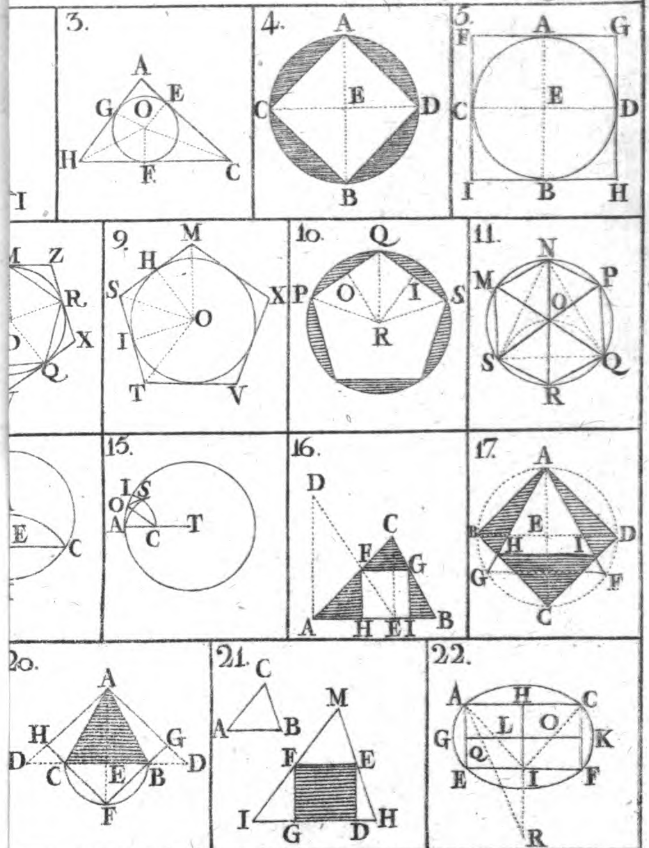


H. Ricarte sculp.



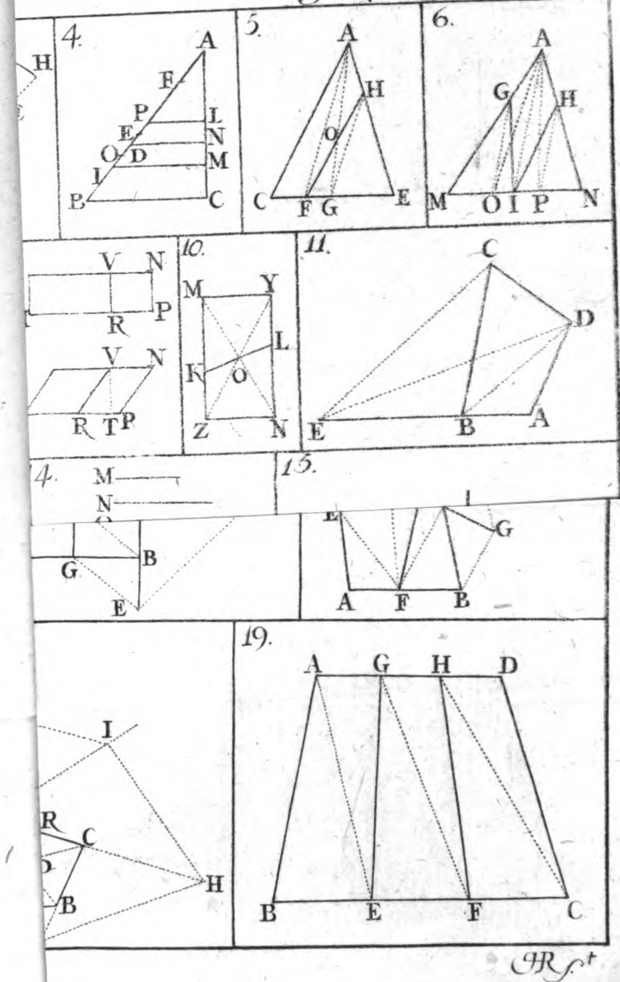
H.Ricarte sculp.t

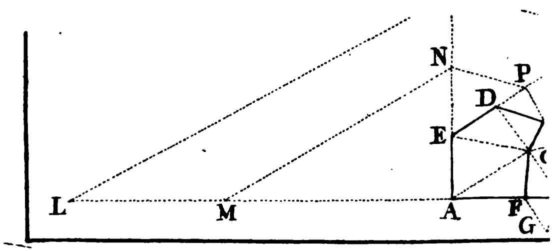
Estampa 3. fol. 308.



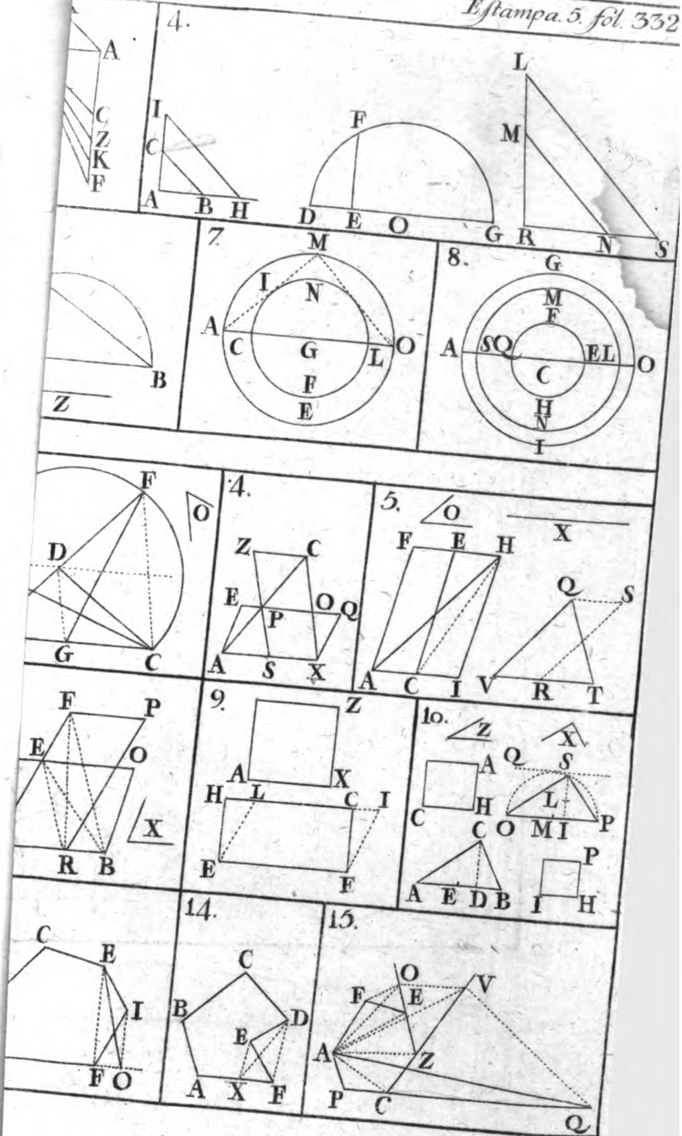
I Ricarte sc.t

fol. 319. Estampa. 4.

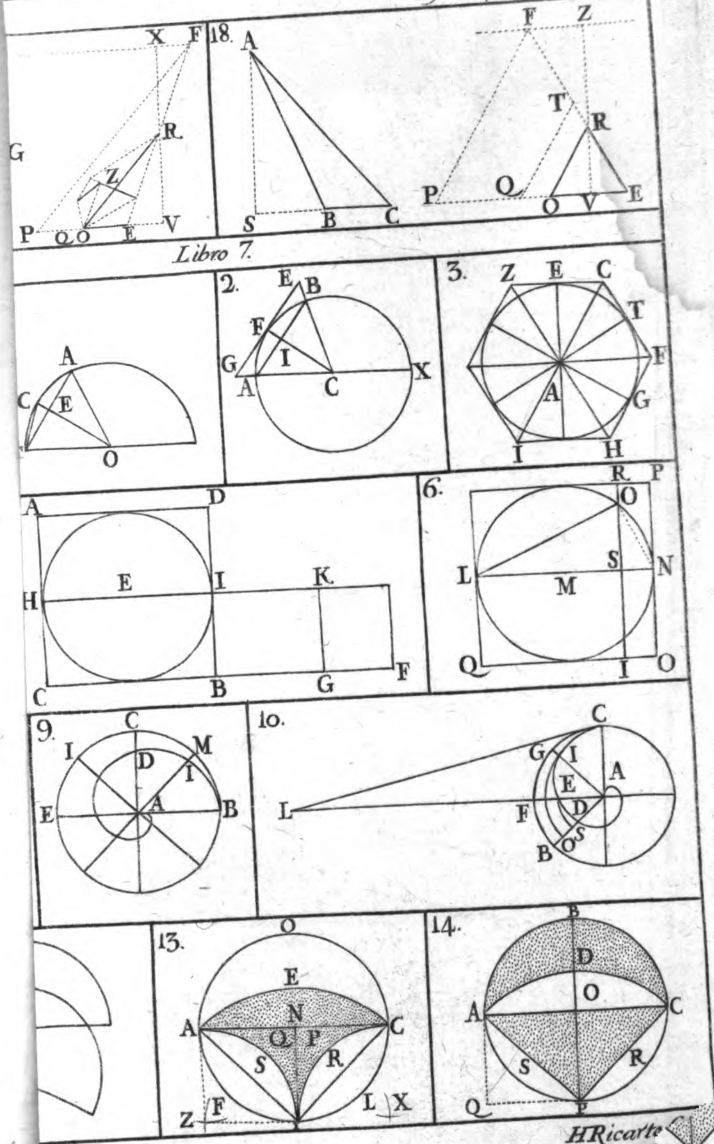


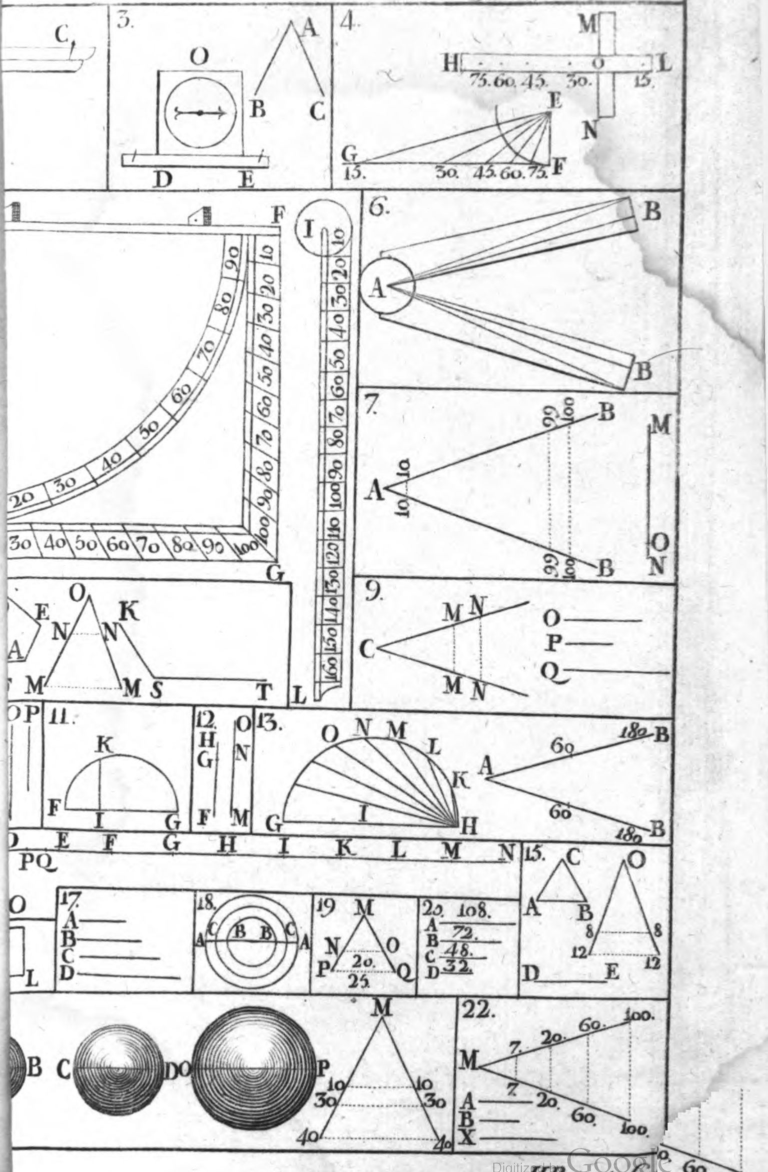

N
P
D
E
L
M
A
F
G

Estampa. 5. fol. 332



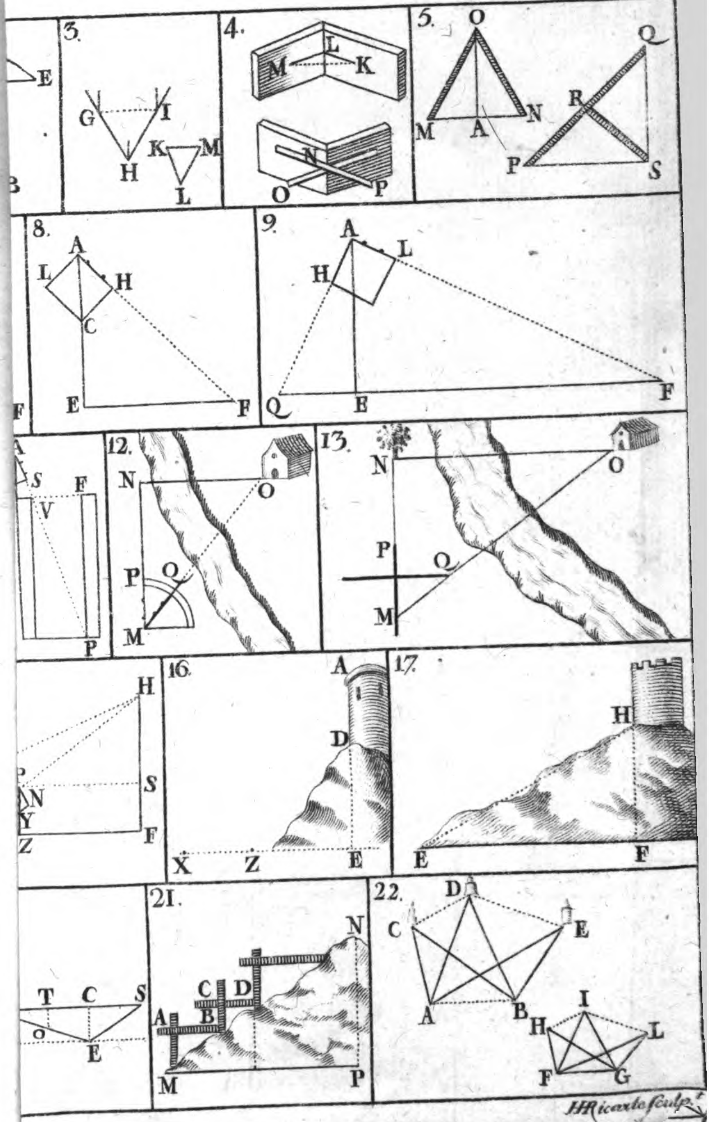
H.Ricarte sculp.


18.
Libro 7.
2.
3.
6.
9.
10.
13.
14.
HRicarte


3.
O
A
B
C
D
E
4.
M
H
L
75. 60. 45. 30. 15.
E
N
G
15. 30. 45. 60. 75. F
6.
A
B
B
7.
A
B
B
M
O
N
9.
C
M N
M N
O
P
Q
11.
K
F
I
G
12.
H
G
F
O
N
M
13.
O N M
L
K
I
G
H
A
60
180 B
60
180 B
15.
C
A
B
O
D
E
17.
A
B
C
D
18.
19
M
N
O
P
20.
25.
Q
20. 108.
A 72.
B 48.
C 32.
D
22.
M
7.
20.
60.
100.
A
B
X

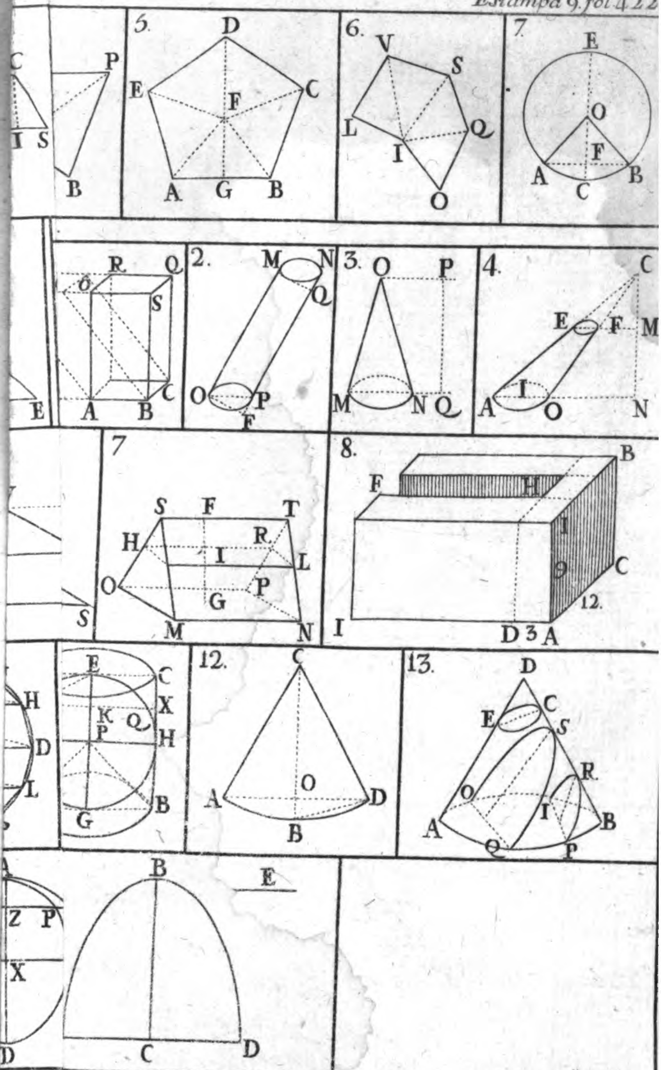
H. Ricarte sc.

Estampa 8. fol. 394.



H.Ricarte sculp.

Estampa 9. fol. 422.



HRicarte sculp.

HRicarte f